RAD

JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE

ZNANOSTI I UMJETNOSTI.

KNJIGA 165.

MATEMATIČKO-PRIRODOSLOVNI RAZRED.

39.

JUGOSLAVENSKA AKADEMIJA U ZAGREBU

U ZAGREBU 1906.

KNJIŽARA JUGOSLAVENSKE AKADEMIJE (DIONIČKE TISKARE)
(GJURO TRPINAC.)

Digitized by Google

Dionička tiskara u Zagrebu.

Digitized by Google

Sadržaj.

	Strana
O zakonu recipročnosti za ostatke osmih potencija u tijelu osmih kružnih jedinica. Od dra. Stjepana Bohničeka	1—49
O transformacijama u ravnini Lobačevskoga. Od dra. Vladimira Varićaka	50—80
Prilog centralnoj projekciji prostora sa četiri dimenzije. Od dra. Jurja Majcena	81—93
O zakonu recipročnosti za ostatke l^n-tih potencija u algebarskim brojnim tjelesima, ako je l prost broj. Od dra. Stjepana Bohničeka	94—210
O kubičnoj hiperboli. Od dra. Jurja Majcena	211—235
O translaciji po paralelama s osju X. Od dra. Vladimira Varićaka	236—244

Digitized by Google

Digitized by Google

O zakonu recipročnosti za ostatke osmih potencija u tijelu osmih kružnih jedinica.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 30. svibnja 1906.

NAPISAO DR. STJEPAN BOHNIČEK.

S pomoću teorije dijeljenja kruga dade se izvesti bikvadratni zakon recipročnosti među racionalnim prostim brojem i kojimgod drugim prostim brojem tijela $k(i)$ imaginarnih brojeva, a na temelju toga posebnoga zakona recipročnosti lako je onda odrediti bikvadratni zakon recipročnosti u tijelu $k(i)$ uopće.

Sa zakonom je recipročnosti za ostatke osmih potencija u tijelu osmih kružnih jedinica drukčije. Dok se posebni zakon recipročnosti među racionalnim prostim brojem i kompleksnim prostim brojem tijela osmih kružnih jedinica lako dade odrediti s pomoću teorije dijeljenja kruga, ne da se na temelju toga posebnoga zakona lako izvesti rečeni zakon recipročnosti za kojagod dva prosta broja tijela osmih kružnih jedinica.

Stoga je Eisenstein na temelju drugih principa pokušao, da dođe do toga zakona. I zbilja mu je na temelju teorije dijeljenja lemniskate pošlo za rukom, da odredi rečeni zakon za izvjesne vrste prostih brojeva tijela osmih kružnih jedinica. Uz to navodi postupak, kojim se u svakom drugom slučaju može odrediti vrijednost izraza

$$\left(\frac{\pi}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_1}{\pi}\right)^{-1},$$

ako su π, π_1 kakvigod prosti brojevi tijela osmih kružnih jedinica. Pri tom obećava, da će doskora posvetiti posebnu raspravu teoriji ostataka osmih kružnih jedinica, u kojoj će pokazati, koji oblik ima zakon recipročnosti za ostatke osmih potencija u tijelu osmih

Digitized by Google

kružnih jedinica uopće.[1] Međutim ga je zatekla smrt g. 1852., a da te rasprave nije objelodanio.

U jednu ruku da ispunim zaostali manjak Eisensteinova dokaza, a u drugu ruku budući da me na to sili proširenje teorije zakona recipročnosti u algebarskim tjelesima, koje sam naumio izvesti u drugoj raspravi, izvest ću u ovoj radnji zakon recipročnosti za ostatke osmih potencija među racionalnim prostim brojem i kompleksnim prostim brojem tijela osmih kružnih jedinica, a u naviještenoj ću radnji na temelju toga posebnoga zakona nadovezujuć na opću teoriju pokazati, koji oblik taj zakon ima u svakom kojem mu drago slučaju.

§ 1.

O tijelu osmih kružnih jedinica.

Ako stavimo

$$\rho = e^{\frac{\pi i}{4}} = \frac{1+i}{\sqrt{2}},$$

to su korijeni jednadžbe

$$x^8 - 1 = 0$$

od oblika

$$\rho^\sigma, \quad (\sigma = 0, 1, 2, \ldots, 7).$$

Tijelo $k(\rho)$ određeno tim korijenima zove se tijelo osmih kružnih jedinica. To je tijelo četvrtoga stepena, jer je ρ korijen ireduktivne jednadžbe

$$x^4 + 1 = 0. \tag{1}$$

Označimo li sa s, s' supstitucije

$$s = (\rho : -\rho), \quad s' = (i : -i),$$

to su korijeni jednadžbe (1)

$$\rho, \quad \rho^5 = s\rho, \quad \rho^7 = s'\rho, \quad \rho^3 = ss'\rho.$$

---

[1] *G. Eisenstein:* Zur Lemniscatenteilung. Crelle's Journal für Math Bd. 39. Uz to valja pogledati:
C. G. I. Jacobi: Gesammelte Werke VI. Bd. Str. 275.

Digitized by Google

Tijelo je $k(\rho)$ od Abelovih, a grupu mu čine supstitucije

$$1,\ s,\ s',\ ss'.$$

Svaka je od supstitucija s, s', ss' drugoga stepena. U tijelu $k(\rho)$ sadržano je tijelo imaginarnih brojeva $k(i)$.

Brojevi

$$1,\ \rho,\ \rho^2,\ \rho^3$$

čine osnovku tijela $k(\rho)$ tako, da se svaki cijeli broj ν tijela $k(\rho)$ dade prikazati u obliku

$$\nu = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3,$$

gdjeno su a_0, a_1, a_2, a_3 cijeli racionalni brojevi.

Broj je idealskih razreda u tijelu $k(\rho)$ jednak 1. Stoga su svi ideali toga tijela glavni ideali.

Ako stavimo

$$\varepsilon = 1 + \rho - \rho^3 = 1 + \sqrt{2},$$

to je ε jedinica tijela $k(\rho)$, a svaka je druga jedinica η toga tijela sadržana u obliku

$$\eta = \rho^m \varepsilon^n, \tag{2}$$

gdjeno su m, n cijeli racionalni eksponenti.[1]

Predočuje li nam

$$\nu = a_0 + a_2 i + (a_1 + a_3 i)\rho$$

kojigod cijeli broj tijela $k(\rho)$, prost prema $1+\rho$, to ima među asocijiranim brojevima

$$\rho^m \varepsilon \nu \quad (m = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 7)$$

uvijek jedan, i to samo jedan, koji zadovoljava jedan između uvjeta

$$a_0 + a_2 i \equiv 1, \quad (2+2i), \quad a_1 + a_3 i \equiv 0, \quad (2+2i) \tag{3}$$

i

$$a_0 + a_2 i \equiv -1, \quad (2+2i), \quad a_1 + a_3 i \equiv 2, \quad (2+2i). \tag{3*}$$

[1] Eisenstein l. c. str. 257.

[2] Eisenstein l. c. str. 258.

Digitized by Google

Ako broj

$$\nu = a_0 + a_2 i + (a_1 + a_3 i)\rho$$

zadovoljava kongruencije (3) ili kongruencije (3*), zove ga Eisenstein primarnim brojem.

Produkt dvaju primarnih brojeva daje opet primaran broj. Ako je ν primaran broj, to su među asocijiranim brojevima

$$\rho^m \varepsilon^n \nu \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

samo brojevi

$$\varepsilon^{2k} \nu \qquad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

primarni.

§ 2.

Prosti ideali tijela $k(\rho)$.

Prosti se ideal $(1+i)$ tijela $k(i)$ raspada u tijelu $k(\rho)$ na dva jednaka prosta ideala prema jednadžbi

$$(1+i) = (1+\rho)^2.$$

Ako je nadalje p racionalan prost broj od oblika $p = 8k+1$, a $a+bi$ prost faktor tijela $k(i)$, koji je sadržan u p, to se $a+bi$ u tijelu $k(\rho)$ raspada na dva različita prosta broja. Uzmemo li $a+bi$ u primarnom obliku, to znači tako, da bude

$$(1) \qquad a + bi \equiv 1, \quad (2+2i),$$

to se dade uvijek u tijelu $k(\rho)$ odrediti primaran broj

$$a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3$$

tako, da bude zadovoljena jednadžba

$$a + bi = (a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3)(a_0 - a_1\rho + a_2\rho^2 - a_3\rho^3).$$

Naznačuje li pak p racionalan prost broj od oblika $p = 8k+5$, to se p raspada u $k(i)$ na dva različita prosta ideala prema jednadžbi

$$p = (a+bi)(a-bi),$$

Digitized by Google

no ti prosti ideali $(a + bi)$ i $(a - bi)$ ostaju u tijelu $k(\rho)$ nerastvoreni. Brojeve $a + bi$, $a - bi$ uzimat ćemo uvijek u primarnom obliku.

Ako je napokon p racionalan prost broj od oblika $p = 4k + 3$, to nam ostaje p i u tijelu $k(i)$ nerastvoren, no u tijelu se $k(\rho)$ raspada na dva različita prosta ideala.

Uzmimo ponajprije, da je $p = 8n + 3$, to se dade p uvijek prikazati u obliku

$$p = a^2 + 2b^2, \tag{2}$$

gdjeno su a, b cijeli racionalni brojevi. Poradi toga je

$$p = (a+bi\sqrt{2})\,(a-bi\sqrt{2}) = (a+b\rho+b\rho^3)\,(a-b\rho-b\rho^3), \tag{2*}$$

gdjeno su $(a + b\rho + b\rho^3)$ i $(a - b\rho - b\rho^3)$ prosti ideali tijela $k(\rho)$. Brojevi a, b moraju biti lihi, kako se lako razabira iz (2). Stoga nemaju brojevi $a + b\rho + b\rho^3$, $a - b\rho - b\rho^3$ primaran oblik, ali ga dobiju, ako se pomnože sa $\pm \varepsilon$.

Nadalje neka bude $p = 8k + 7$, to se dade p prikazati u obliku

$$p = a^2 - 2b^2, \tag{3}$$

gdjeno su a, b cijeli racionalni brojevi. Poradi toga je

$$p = (a+b\sqrt{2})\,(a-b\sqrt{2}) = (a+b\rho-b\rho^3)\,(a-b\rho+b\rho^3), \tag{3*}$$

gdjeno su $(a + b\rho - b\rho^3)$ i $(a - b\rho + b\rho^3)$ prosti ideali tijela $k(\rho)$. Brojevi $a + b\rho - b\rho^3$, $a - b\rho + b\rho^3$ nemaju primaran oblik, jer su a i b lihi brojevi, no dobiju ga, ako ih pomnožimo sa $\pm \varepsilon$.

§ 3.

Pomoćne formule iz teorije dijeljenja kruga.

Kakogod se s pomoću relacija, što ih daje teorija dijeljenja kruga, dade dokazati bikvadratni zakon recipročnosti u tijelu imaginarnih brojeva $k(i)$, tako će nam ista teorija dijeljenja kruga poslužiti svojim resultatima, da izvedemo zakon recipročnosti, koji postoji među racionalnim i kompleksnim brojem tijela $k(\rho)$ osmih kružnih jedinica.

Digitized by Google

Označimo sa p racionalan prost broj, a sa g primitivan korijen kongruencije za broj p. Stavimo nadalje

$$r = e^{\frac{2\pi i}{p}}.$$

Ako se dade $p-1$ rastaviti u dva faktora e, f tako, da bude

$$p-1 = ef,$$

neka nam predočuje α primitivnu kružnu jedinicu e-toga stepena.

Uvedemo li tada oznake

$$(1) \qquad (\alpha^\lambda, r) = \sum_{h=0}^{p-2} \alpha^{\lambda h} r^{gh} = \sum_{s=1}^{p-1} \alpha^{\lambda ind s} r^s,$$

$$(2) \qquad \psi_\lambda(\alpha) = \sum_{t=1}^{p-2} \alpha^{ind\, t - (\lambda+1) ind (t+1)},$$

gdjeno je λ pozitivan cio racionalan broj, to valjaju snošaji:

$$(3) \qquad \psi_\lambda(\alpha) = \frac{(\alpha^\lambda, r)\,(\alpha, r)}{(\alpha^{\lambda+1}, r)},$$

$$(4) \qquad (\alpha^\lambda, r)\,(\alpha^{-\lambda}, r) = (-1)^{f\lambda} p,$$

$$(5) \qquad (\alpha, r)^\lambda = (\alpha^\lambda, r)\,\psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots \psi_{\lambda-1}(\alpha),$$
$$(\lambda = 1, 2, \ldots, e-2);$$

$$(6) \qquad (\alpha, r)^e = (-1)^f p\, \psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots \psi_{e-2}(\alpha).^1$$

Uzmemo li sada, da je

$$p \equiv 1, \ (4),$$

to možemo za f staviti

$$f = \frac{p-1}{4}$$

tako, da nam u tom slučaju α predočuje primitivni četvrti korij jedinice $\pm i$. Stavimo li za α u gornje jednadžbe i, dobit ćemo

[1] *H. Weber:* Lehrbuch der Algebra II. Bd. § 177.

Digitized by Google

$$(7) \qquad (i^\lambda, r) = \sum_{h=0}^{p-2} i^{\lambda h_r gh} = \sum_{s=1}^{p-1} i^{\lambda\, ind s_r s},$$

$$(8) \qquad \psi_\lambda(i) = \sum_{t=1}^{p-2} i^{ind\, t - (\lambda+1)\, ind\,(t+1)},$$

$$(9) \qquad \psi_\lambda(i) = \frac{(i^\lambda, r)\,(i, r)}{(i^{\lambda+1}, r)},$$

$$(10) \qquad (i^\lambda, r)\,(i^{-\lambda}, r) = (-1)^{\frac{p-1}{4}\cdot\lambda} p,$$

$$(i, r)^\lambda = (i^\lambda, r)\,\psi_1(i)\psi_2(i) \ldots \psi_{\lambda-1}(i)$$

$$(\lambda = 1, 2);$$

$$(11) \qquad (i, r)^4 = (-1)^{\frac{p-1}{4}} p\,\psi_1(i)\psi_2(i).$$

Iz tih se formula dobiva za p rastvor[1]

$$(12) \qquad p = \psi_2(i)\,\psi_2(-i),$$

gdjeno su $\psi_2(i)$, $\psi_2(-i)$ dva među sobom različita prosta broja tijela $k(i)$. Stavimo li

$$(13) \qquad \psi_2(i) = m + ni,$$

to je prema tomu

$$(14) \qquad p = (m+ni)\,(m-ni),$$

a jednadžba (11) dobiva ovaj oblik

$$(15) \qquad (i, r)^4 = (-1)^{\frac{p-1}{4}} p\,(m+ni)^2.$$

Broj $m+ni$ nije primaran broj, kao što pokazuje teorija dijeljenja kruga, nego da postane primaran, valja ga pomnožiti sa -1 tako, da je

[1] *P. Bachmann:* Die Lehre von der Kreisteilung und ihre Beziehungen zur Zahlentheorie. Dreizehnte Vorlesung. Str. 168.

Digitized by Google

$$(16) \qquad -(m+ni) \equiv 1, \quad (2+2i).$$

Tim ćemo se poslije poslužiti.

Uzmimo nadalje, da je

$$p \equiv 1, \ (8),$$

to možemo za f staviti

$$f = \frac{p-1}{8}$$

tako, da nam α u jednadžbama (1) do (6) predočuje primitivan osmi korijen jedinice.

Jednadžbe (4), (6) dobivaju u tom slučaju ovaj oblik:

$$(17) \qquad (\alpha^{\lambda}, r)\ (\alpha^{-\lambda}, r) = (-1)^{\frac{p-1}{8}\lambda} p, \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, 6),$$

$$(18) \qquad (\alpha, r)^8 = (-1)^{\frac{p-1}{8}} p \psi_1(\alpha)\psi_2(\alpha) \ldots \psi_6(\alpha).$$

Među veličinama $\psi_\lambda(\alpha)$ postoje snošaji

$$(19) \qquad \begin{aligned} \psi_6(\alpha) &= (-1)^{\frac{p-1}{8}} \psi_1(\alpha), \\ \psi_5(\alpha) &= (-1)^{\frac{p-1}{8}} \psi_2(\alpha), \\ \psi_4(\alpha) &= (-1)^{\frac{p-1}{8}} \psi_3(\alpha). \end{aligned}$$

O tom se lako uvjerimo s pomoću jednadži (3).

Stoga možemo (18) napisati također ovako:

$$(20) \qquad (\alpha, r)^8 = p\,\psi_1{}^2(\alpha)\,\psi_2{}^2(\alpha)\,\psi_3{}^2(\alpha).$$

No budući da je

$$(21) \qquad \psi_2(\alpha)\,\psi_3(\alpha) = \psi_1(\alpha)\,\psi_1(\alpha^2),$$

Digitized by Google

dade se jednadžba (20) prikazati u jednostavnom obliku

$$(22) \qquad (\alpha, r)^8 = p\psi_1^4(\alpha)\,\psi_1^2(\alpha^2).$$

Osim relacija, što smo ih dosad naveli za veličine $\psi_\lambda(\alpha)$, istaknuo bih ovdje još neke, kojima se kanim poslije poslužiti.

Ponajprije se možemo lako uvjeriti, da je

$$(23) \qquad \psi_\lambda(\alpha^s)\,\psi_\lambda(\alpha^{-s}) = p$$
$$(s = 1, 2, \ldots, 6).$$

Treba samo prema jednadžbi (3) staviti

$$\psi_\lambda(\alpha^s) = \frac{(\alpha^{\lambda s}, r)\,(\alpha^s, r)}{(\alpha^{(\lambda+1)s}, r)},$$

$$\psi_\lambda(\alpha^{-s}) = \frac{(\alpha^{-\lambda s}, r)\,(\alpha^{-s}, r)}{(\alpha^{-(\lambda+1)s}, r)},$$

pak se poslužiti jednadžbom (17).

Napokon se neposredno razabira na temelju jednadžbe (9), da je

$$(24) \qquad \psi_3(\alpha) = \psi_3(\alpha^3),$$

$$(24^*) \qquad \psi_2(\alpha) = \psi_2(-\alpha).$$

Ispravnost prve od tih jednadžbi vidi se već prvim pogledom na (9). Nadalje je prema (9)

$$\frac{\psi_2(\alpha)}{\psi_2(-\alpha)} = \frac{(\alpha^2, r)\,(\alpha, r)}{(\alpha^3, r)} : \frac{(\alpha^2, r)\,(\alpha^5, r)}{(\alpha^7, r)} = \frac{(\alpha, r)\,(\alpha^7, r)}{(\alpha^3, r)\,(\alpha^5, r)} =$$

$$= \frac{(-1)^{\frac{p-1}{8}} p}{(-1)^{\frac{p-1}{8}} p} = 1,$$

a tim je dokazana i jednadžba (24*).

Dalje točnije određivanje veličina $\psi_\lambda(\alpha)$ ostavljamo za slijedeći paragraf.

Digitized by Google

§ 4.

O brojevima $\psi_\lambda(\alpha)$.

Prosti se brojevi p od oblika $p = 8k+1$ raspadaju, kako je razvijeno u § 1., u tijelu $k(i)$ na dva među sobom različita prosta ideala, a svaki se od tih ideala raspada u tijelu $k(\rho)$ opet na dva različita prosta ideala tako, da je p u tijelu $k(\rho)$ jednak produktu četiriju između sebe različnih prostih ideala. Ako označimo jedan od tih prostih ideala sa $\mathfrak{p}$, to valja jednadžba

$$(1) \qquad p = \mathfrak{p} \,.\, s\mathfrak{p} \,.\, s'\mathfrak{p} \,.\, ss'\mathfrak{p}.$$

Iz jednadžbe (22) predašnjega paragrafa razabiramo, da je svaki između brojeva $\psi_\lambda(\alpha^s)$ jednak produktu dvaju između ideala $\mathfrak{p}$, $s\mathfrak{p}$, $s'\mathfrak{p}$, $ss'\mathfrak{p}$. Prva nam je zadaća, da odredimo, koja su dva od tih prostih ideala sadržana u broju $\psi_\lambda(\alpha^s)$.

Iz jednadžbe (21) predašnjega paragrafa vidimo, da je $(\rho, r)^s$ cio broj tijela $k(\rho)$, koji osim prostih ideala $\mathfrak{p}$, $s\mathfrak{p}$, $s'\mathfrak{p}$, $ss'\mathfrak{p}$ nikakovih drugih prostih faktora nema. Da odredimo, u kojoj je potenciji pojedini između ideala $\mathfrak{p}$, $s\mathfrak{p}$, $s'\mathfrak{p}$, $ss'\mathfrak{p}$ sadržan kao faktor u broju $(\rho, r)^s$, uzet ćemo, da je $\mathfrak{q}$ onaj između ideala $\mathfrak{p}$, $s\mathfrak{p}$, $s'\mathfrak{p}$, $ss'\mathfrak{p}$, koji je sadržan u $(\rho, r)^s$ u najnižoj potenciji. Uvedemo li pokratu

$$(2) \qquad \Omega = (\rho, r), \quad \Omega^s = \omega,$$

moći ćemo prikazati ω u obliku

$$(3) \qquad \omega = (\rho, r)^s = \mathfrak{q}^{a_0 + a_1 s + a_2 s' + a_3 ss'},$$

gdjeno su eksponenti a_0, a_1, a_2, a_3 pozitivni cijeli racionalni brojevi. Valja nam odrediti te eksponente. Da to polučimo, obazret ćemo se na to, da su

$$\frac{\Omega^s}{\Omega^\delta}, \quad \Omega^{s'}\Omega$$

brojevi tijela $k(\rho)$. Stavimo li

$$\frac{\Omega^s}{\Omega^\delta} = \mu, \quad \Omega^{s'}\Omega = \nu,$$

Digitized by Google

gdjeno nam μ, ν predočuju cijele brojeve tijela $k(\rho)$, dobit ćemo, da je

$$\omega^{s-5} = \mu^8, \quad \omega^{s'+1} = \nu^8.$$

Uvedimo sada za ω vrijednost prema jednadžbi (3), pak će nam izići snošaji

$$(4) \qquad q^{(s-5)(a_0+a_1s+a_2s'+a_3ss')} = \mu^8,$$

$$(4^*) \qquad q^{(s'+1)(a_0+a_1s+a_2s'+a_3ss')} = \nu^8.$$

Izvede li se dakle u izrazima

$$(s-5)\ (a_0+a_1s+a_2s'+a_3ss'),$$
$$(s'+1)\ (a_0+a_1s+a_2s'+a_3ss')$$

množidba pa stavi li se

$$s^2 = 1, \quad s'^2 = 1,$$

moraju biti poradi (4), (4*) koeficijenti nepoznanica s, s' svi po redu djeljivi sa 8. Tako dobivamo kongruencije

$$(5) \qquad \begin{aligned} a_0 - 5a_1 &\equiv 0, \quad a_0 + a_3 \equiv 0, \\ a_2 - 5a_3 &\equiv 0, \quad a_1 + a_3 \equiv 0, \end{aligned} \qquad (8).$$

No brojevi a_0, a_1, a_2, a_3 ne prekoračuju broja 8, kako se vidi iz jednadžbe (21) predašnjega paragrafa. Stoga mora biti

$$a_0 + a_2 = 8, \quad a_1 + a_3 = 8,$$

a budući da smo uzeli, da je a_0 najmanji između brojeva a_0, a_1, a_2, a_3, izvodimo iz kongruencija (5), da mora biti

$$a_0 = 1, \quad a_2 = 7, \quad a_3 = 3, \quad a_1 = 5,$$

pak je stoga

$$\omega = q^{1+5s+7s'+3ss'}.$$

Isporedimo li to sa jednadžbom (21) predašnjega paragrafa, izvest ćemo lako ove relacije

Digitized by Google

$$\psi_1(i) = s'\mathfrak{q} \,.\, ss'\mathfrak{q},$$
$$\psi_1(\rho) = s\mathfrak{q} \,.\, s'\mathfrak{q}.$$

Ako stavimo $s'\mathfrak{q} = \mathfrak{p}$, dobit ćemo

(6) $$\omega = \mathfrak{p}^7 \,.\, ss'\mathfrak{p}^5 \,.\, s\mathfrak{p}^3 \,.\, s'\mathfrak{p},$$

(7) $$\psi_1(i) = \mathfrak{p} \,.\, s\mathfrak{p},$$

(8) $$\psi_1(\rho) = \mathfrak{p} \,.\, ss'\mathfrak{p}.$$

Poradi jednadžbe (21) u predašnjem paragrafu moraju i brojevi $\psi_2(\rho)$, $\psi_3(\rho)$ biti djeljivi sa $\mathfrak{p}$. Obazremo li se sada još na jednadžbe (24), (24*) § 3., uvjerit ćemo se smjesta, da je

(9) $$\psi_2(\rho) = \mathfrak{p} \,.\, s\mathfrak{p},$$

(10) $$\psi_3(\rho) = \mathfrak{p} \,.\, ss'\mathfrak{p}.$$

Prema tomu su kvocijenti

$$\frac{\psi_1(i)}{\psi_2(\rho)}, \quad \frac{\psi_1(\rho)}{\psi_3(\rho)}$$

jednaki jedinicama tijela $k(\rho)$, a ove nam valja još odrediti.

Već smo prije spomenuli, da je $-\psi_2(i) = m + ni$ ili, što je isto, budući da je $p-1$ djeljivo sa 8, $-\psi_1(i) = m + ni$ primaran broj, pak da se dade uvijek naći primaran broj $\pi = a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3$ u tijelu $k(\rho)$ tako, da bude

(11) $$-\psi_1(i) = m + ni = \pi \,.\, s\pi.$$

Prema tomu ćemo, ako se osvrnemo na jednadžbu (10), moći za $\psi_3(\rho)$ napisati jednadžbu

(12) $$\psi_3(\rho) = \eta(\rho)\,\pi \,.\, ss'\pi,$$

gdje nam $\eta(\rho)$ označuje jedinicu u $k(\rho)$. Pri tom smo uzeli, da je

$$\mathfrak{p} = (\pi).$$

Ako sada uvrstimo u (12) mjesto ρ vrijednost ρ^3, dobit ćemo

(13) $$\psi_3(\rho^3) = \eta(\rho^3)\,\pi \,.\, ss'\pi.$$

Digitized by Google

Iz jednadžbi (12), (13) izlazi napokon poradi (24) § 3.

$$\frac{\psi_3(\rho)}{\psi_3(\rho^3)} = \frac{\eta(\rho)}{\eta(\rho^3)} = +1. \tag{14}$$

Prema (2) § 1. možemo $\eta(\rho)$ prikazati u obliku

$$\eta(\rho) = \rho^m(1+\sqrt{2})^n.$$

Stoga mora biti prema (14)

$$\rho^m(1+\sqrt{2})^n = \rho^{3m}(1-\sqrt{2})^n.$$

Pomnožimo li tu obje strane jednadžbe sa $\rho^{5m}(1+\sqrt{2})^n$, dobit ćemo

$$\rho^{6m}(1+\sqrt{2})^{2n} = (-1)^n,$$

no to je očito samo moguće, ako je $n=0$, a tada mora biti m djeljiv sa 4 tako, te napokon izlazi, da je

$$\eta(\rho) = \pm 1.$$

Jednadžba (12) ima dakle ovaj oblik

$$\psi_3(\rho) = \pm \pi . ss' \pi. \tag{15}$$

Sada treba još istražiti, koja je od oznaka $\pm$ prava.
Za tu ćemo svrhu napisati $\psi_3(\rho)$ prema (2) § 3. ovako

$$\psi_3(\rho) = \sum_{t=1}^{p-2} \rho^{ind\, t + 4\, ind\,(t+1)} \tag{16}$$

ili, ako stavimo

$$\lambda = ind\, t, \quad k = ind\,(t+1),$$

još jednostavnije u obliku

$$\psi_3(\rho) = \Sigma \rho^{\lambda+4k}, \tag{17}$$

a u tom zbroju mora λ da prođe sve vrijednosti od 0 do $p-2$ izuzevši vrijednost $\frac{p-1}{2}$, koja bi odgovarala broju $t=p-1$, ko-

Digitized by Google

jega u jednadžbi (16) nema; k pak treba svaki put odrediti tako, da bude

$$g^k \equiv 1 + g^\lambda, \quad (p).$$

Stavimo li sada

$$\psi_3(\rho) = \Sigma\, \rho^{\lambda+4k} = a_0 + a_1\rho + a_2\rho^2 + a_3\rho^3,$$

to ćemo dobiti broj a_0, ako u zbroju Σ protegnemo λ samo na one brojeve, koji su djeljivi sa 4, tako da možemo napisati

$$a_0 = \Sigma\, (-1)^{\lambda'+k}, \tag{18}$$

gdjeno valja λ' da prođe sve vrijednosti od 0 do $\frac{p-5}{4}$ izuzevši vrijednost $\frac{p-1}{8}$, a k treba svaki put odrediti tako, da bude

$$g^k \equiv 1 + g^{4\lambda'}, \ (p). \tag{19}$$

Osim broja $\lambda' = 0$ dadu se ostali brojevi λ', koji dolaze u gornjem zbroju, spariti tako, da se svaki par sastoji iz brojeva

$$\lambda', \quad \frac{p-1}{4} - \lambda' \tag{20}$$

$$\left(\lambda' = 1, 2, 3, \ldots, \frac{p-9}{8}\right).$$

Ako nam k i k' nadaju dva broja, koji pripadaju k paru (20), valja relacija

$$g^{k+k'} \equiv (1+g^{4\lambda'})(1+g^{-4\lambda'}) \equiv g^{-4\lambda'}(1+g^{4\lambda'})^2, \quad (p);$$

dakle je $g^{k+k'}$ kongruentno kvadratu cijeloga broja s obzirom na modul p ili, što isto znači, $k+k'$ jest tak broj. Za $\lambda' = 0$ dobivamo iz (19), da je

$$g^k \equiv 2, \quad (p),$$

te mora k biti djeljiv sa 2, budući da je $p \equiv 1$, (8). Član zbroja (18), koji potječe od eksponenta $\lambda' = 0$, ima dakle vrijednost $+1$. Po dva pak člana toga zbroja, koji pripadaju k paru (20), imaju uvijek istu vrijednost, tako da možemo (18) napisati ovako:

Digitized by Google

$$a_0 = 1 + 2\Sigma\,(-1)^{\lambda'+k},$$

gdjeno sada λ' valja protegnuti samo na brojeve od 0 do $\frac{p-9}{8}$. Označimo li pak sa A broj, koji nam nadaje, koliko je puta $\lambda'+k$ lih broj, dobit ćemo iz zadnje jednadžbe ovu:

$$a_0 = 1 + 2 \cdot \frac{p-9}{8} - 4A.$$

Ta se jednadžba dade napisati u obliku kongruencije ovako:

$$a_0 \equiv -(-1)^{\frac{p-1}{8}}, \quad (4). \tag{21}$$

Izvede li se sada množidba na desnoj strani jednadžbe (15), naći ćemo za a_0 jednadžbu

$$a_0 = \pm\,(a^2 - b^2 + c^2 - d^2).$$

Budući da su brojevi b, c, d taki, a a lih, mora biti

$$a^2 - b^2 + c^2 - d^2 \equiv 1, \quad (4).$$

Stoga je s obzirom na (21)

$$a_0 = -(-1)^{\frac{p-1}{8}}\,(a^2 - b^2 + c^2 - d^2),$$

a jednadžba (15) dobiva tim konačni oblik

$$\psi_2(\rho) = -(-1)^{\frac{p-1}{8}}\,\pi \cdot ss'\pi. \tag{22}$$

Nadalje ću pokazati, da je

$$\psi_2(\alpha) = \pm\,\psi_1(i). \tag{23}$$

$$\psi_5(\alpha) = \pm\,\psi_1(i). \tag{23*}$$

S obzirom na (9) mora biti

Digitized by Google

$$\psi_2(\rho) = \eta(\rho)\,\pi\,.\,s\pi,$$

gdjeno je $\eta(\rho)$ jedinica u $k(\rho)$.

No budući da je

$$\psi_1(i) = \pi\,.\,s\pi,$$

izlazi relacija

$$\frac{\psi_2(\rho)}{\psi_1(i)} = \eta(\rho), \tag{24}$$

a iz nje izvodimo dalje ovu:

$$\frac{\psi_2(\rho^7)}{\psi_1(-i)} = \eta(\rho^7). \tag{25}$$

Pomnožimo li te dvije jednadžbe (24) i (25), dobit ćemo

$$\frac{\psi_2(\rho)\ \psi_2(\rho^7)}{\psi_1(i)\psi_1(-i)} = \eta(\rho)\,\eta(\rho^7),$$

a s obzirom na (23) § 3.

$$\eta(\rho)\,\eta(\rho^7) = 1.$$

Stavimo li opet

$$\eta(\rho) = \rho^m(1+\sqrt{2})^n,$$

izići će nam

$$\eta(\rho)\eta(\rho^7) = (1+\sqrt{2})^{2n} = 1,$$

a to je samo moguće, ako je $n = 0$. Dakle je

$$\eta(\rho) = \rho^m.$$

Uvedemo li sada u (24) za ρ vrijednost ρ^3, dobit ćemo

$$\frac{\psi_2(\rho^3)}{\psi_1(-i)} = \eta(\rho^3), \tag{26}$$

a (24) i (26) daje

$$\frac{\psi_2(\rho)\psi_2(\rho^3)}{\psi_1(i)\psi_1(-i)} = \eta(\rho)\eta(\rho^3) = \rho^{4m}. \tag{27}$$

Digitized by Google

No budući da je

$$\psi_2(\rho)\psi_2(\rho^3) = \frac{(\rho, r)\ (\rho^2, r)}{(\rho^3, r)} \cdot \frac{(\rho^3, r)\ (\rho^6, r)}{(\rho, r)} = p,$$

to je lijeva strana jednadžbe (27) jednaka 1. Stoga mora biti m djeljiv sa 2. Imamo dakle relaciju

$$\psi_2(\rho) = i^s\ \psi_1(i).$$

Treba dakle još pokazati, da s mora biti tak broj. Stavimo li za $\psi_1(i)$ vrijednost $m+ni$, to znamo, da je m lih broj, a n da je djeljiv sa 4. Kada bi s u jednadžbi

$$\psi_2(\rho) = i^s(m+ni)$$

bio lih broj, morao bi biti realni dio broja $\psi_2(\rho)$ djeljiv sa 4. Isto vrijedi naravno poradi jednadžbe (23*) i za realni dio veličine $\psi_5(\rho)$. No pokazat ćemo, da je rečeni realni dio lih, a tim će biti dokazano, da je s tak broj.

Po definiciji je

$$\psi_5(\rho) = \sum_{t=1}^{p-2} \rho^{ind\,t+2ind(t+1)}.$$

Stavit ćemo

$$\psi_5(\rho) = \Sigma\ \rho^{\lambda+2k} \tag{28}$$

tako, da bude

$$\lambda = ind\,t, \quad k = ind\,(t+1);$$

onda mora λ da prođe sve cijele brojeve od 0 do $p-2$ izuzevši $\frac{p-1}{2}$, a k treba svaki put odrediti kongruencijom

$$g^k \equiv 1 + g^\lambda, \quad (p).$$

U zbroju jednadžbe (28) ukidaju se članovi, koji potječu od lihih brojeva λ, tako da možemo napisati, da je

$$\psi_5(\rho) = a+bi = \Sigma\ \rho^{\lambda'+k}, \tag{28*}$$

Digitized by Google

gdje treba λ' da prođe sve cijele brojeve od 0 do $\frac{p-3}{2}$ izuzevši broj $\frac{p-1}{4}$, a k valja odrediti prema kongruenciji

$$g^k \equiv 1 + g^{2\lambda'}, \quad (p).$$

Osim broja λ' dadu se svi ostali brojevi λ' spariti tako, da se svaki par sastoji od brojeva

$$\lambda', \quad \frac{p-1}{2} - \lambda', \tag{29}$$

$$\left(\lambda' = 1, 2, \ldots, \frac{p-5}{4}\right).$$

Ako sa k, k' označimo brojeve, koji pripadaju k paru (29), to je

$$g^{k+k'} \equiv (1+g^{2\lambda'})(1-g^{-2\lambda'}) \equiv g^{-2\lambda'}(1+g^{2\lambda'})^2, \quad (p),$$

a to znači: $g^{k+k'}$ je kongruentno kvadratu cijela broja s obzirom na p ili, što je isto, $k+k'$ je tak broj. Za λ' nalazimo kao i prije, da k, koji mu odgovara, mora biti tak broj, jer je p od oblika $p = 8k+1$. Stoga je član, koji potječe od broja $\lambda' = 0$ u zbroju (28*), jednak ± 1.

Članovi, koji potječu od para (29), imaju oblik

$$i^{\lambda'+k}, \quad i^{\frac{p-1}{2}-\lambda'+k'},$$

te je uvijek

$$i^{\frac{p-1}{2}-\lambda'+k'} = \pm i^{\lambda'+k}.$$

Zbroj je takovih članova djeljiv sa 2.

Stoga je

$$\psi_s(\rho) = a + bi \equiv 1, \quad (2),$$

a tim je željeni dokaz izveden; s je tak broj.

Jednadžbe su (23), (23*) ispravne.

Poradi (21) § 3. postoji snošaj

Digitized by Google

$$\frac{\psi_1(\rho)}{\psi_3(\rho)} = \frac{\psi_2(\rho)}{\psi_1(\rho^2)}, \tag{30}$$

a iz njega izvodimo, da je poradi (23) i (19) § 3.

$$\psi_1(\rho) = \pm \psi_3(\rho).$$
$$\psi_6(\rho) = \pm \psi_3(\rho).$$

Još nam valja odrediti, koja je od oznaka $\pm$ u pojedinom slučaju prava. Za tu ću svrhu promatrati veličinu $\psi_6(\rho)$.

Po definiciji je

$$\psi_6(\rho) = \sum_{t=1}^{p-2} \rho^{ind\, t + ind\,(t+1)}. \tag{31}$$

Obazremo li se na jednadžbu (24) § 3. i na prvi od snošaja (19) istoga paragrafa, vidjet ćemo, da je

$$\psi_6(\rho) = \psi_6(\rho^3). \tag{32}$$

Stavimo li

$$\psi_6(\rho) = a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3,$$

to mora poradi (32) da bude

$$a + b\rho + c\rho^2 + d\rho^3 = a + b\rho^3 - c\rho^2 + d\rho,$$

a odatle izvodimo, da je

$$b = d, \quad c = 0. \tag{33}$$

Označimo sada sa A_s broj, koji nam nadaje, koliko je puta u zbroju (31) eksponent

$$ind\, t + ind\,(t+1) \equiv s, \quad (8),$$
$$(s = 0, 1, 2, \ldots, 7).$$

Tada je poradi (33)

$$A_2 = A_6. \tag{34}$$

Sjetimo se sada, da je

Digitized by Google

$$\psi_2(i) = \sum_{t=1}^{p-2} i^{ind\,t+ind\,(t+1)}. \quad (35)$$

Svakomu članu zbroja (31) odgovara po jedan član zbroja (35). Ako je

$$ind\,t + ind\,(t+1) \equiv 0, \quad (4),$$

to je član, koji odgovara u (35), jednak $+1$, ako li je

$$ind\,t + ind\,(t+1) \equiv 2, \quad (4),$$

to je član, koji odgovara u (35), jednak -1. U svakom je drugom slučaju član, koji odgovara, $\pm i$. Stoga je

$$A_8 + A_4 - A_2 - A_6 \equiv -1, \quad (4)$$

ili poradi (34)

$$A_8 + A_4 - 2A_2 \equiv -1 \quad (4). \quad (36)$$

Obazremo li se sada na to, da je

$$ind\,t + ind\,(t+1) \equiv ind\,(p-t-1) + ind\,(p-t), \quad (8), \quad (37)$$

budući da je

$$\begin{aligned} ind\,(p-t-1) + ind\,(p-t) &\equiv ind\,[-(t+1)] + ind\,(-t) \\ &\equiv 2ind\,(-1) + ind\,t + ind\,(t+1) \\ &\equiv 2 \cdot \frac{p-1}{2} + ind\,t + ind\,(t+1), \quad (8), \end{aligned}$$

a po pretpostavci je $p-1$ djeljivo sa 8, moći ćemo članove zbroja (31) spariti sve osim jednoga, koji odgovara eksponentu

$$ind\,\frac{p-1}{2} + ind\,\frac{p+1}{2}. \quad (38)$$

Svakomu članu s eksponentom $ind\,t + ind\,(t+1)$ odgovara kao par član s eksponentom $ind\,(p-t-1) + ind\,(p-t)$. Članovi svi koga para imaju poradi (37) istu vrijednost. Budući pak da realna čest broja $\psi_6(\rho)$ s obzirom na (23*) liha, mora biti

$$ind\,\frac{p-1}{2} + ind\,\frac{p+1}{2} \equiv 0, \quad (4). \quad (39)$$

Digitized by Google

Iz toga onda izvodimo, da je A_2 tak broj. Stoga možemo jednadžbu (36) napisati ovako:

$$A_8 + A_4 \equiv -1, \quad (4).$$

Pribrojimo li s obje strane te kongruencije $-2A_4$, dobit ćemo

$$A_8 - A_4 \equiv -1 - 2A_4, \quad (4).$$

$A_8 - A_4$ nadaje realnu čest veličine $\psi_6(\rho)$. Vidimo dakle, da je realna čest broja $\psi_6(\rho)$ kongruentna -1 s obzirom na modul 4, ako je A_4 tak broj, a kongruentna $+1$ s obzirom na 4, ako je A_4 lih broj. No A_4 bit će onda i samo onda poradi (37) tak, ako je

$$(40) \qquad ind \frac{p-1}{2} + ind \frac{p+1}{2} \equiv 0, \quad (8),$$

a onda i samo onda lih, ako je

$$(41) \qquad ind \frac{p-1}{2} + ind \frac{p+1}{2} \equiv 4, \quad (8).$$

Da u pojedinom slučaju odredimo, da li je realna čest broja $\psi_6(\rho)$ kongruentna $+1$ ili -1 s obzirom na modul 4, valjat će samo istražiti, da li postoji kongruencija (41) ili (40).

Kako je

$$\frac{p-1}{2} \equiv ind\,(p-1) \equiv ind\,2 + ind \frac{p-1}{2}, \quad (p-1),$$

a $p-1$ je djeljivo sa 8, mora biti

$$(42) \qquad ind \frac{p-1}{2} \equiv -ind\,2 + \frac{p-1}{2}, \quad (8);$$

a budući da je

$$0 \equiv ind\,(p+1) \equiv ind\,2 + ind \frac{p+1}{2}, \quad (p-1),$$

mora opet biti

$$(43) \qquad ind \frac{p+1}{2} \equiv -ind\,2, \quad (8).$$

Digitized by Google

Kongruencije (42) i (43) daju snošaj

$$ind\,\frac{p-1}{2} + ind\,\frac{p+1}{2} \equiv 2ind\,2 + \frac{p-1}{2}, \quad (8).$$

Stavimo li za čas $ind\,\frac{p-1}{2} + ind\,\frac{p+1}{2} = e$, to će biti, ako je $ind\,2 \equiv 0$, (4), a

$$p \equiv 1, \ (16), \qquad e \equiv 0 \ (8),$$

ako li je

$$p \equiv 9, \ (16), \qquad e \equiv 4 \ (8);$$

nadalje, ako je $ind\,2 \equiv 2$, (4), a

$$p \equiv 1, \ (16), \qquad e \equiv 4, \ (8),$$

ako li je

$$p \equiv 9, \ (16), \qquad e \equiv 0, \ (8).$$

Razumijemo li sada pod $\left(\left(\frac{2}{p}\right)\right)$ broj $+1$, ako je 2 kongruentan bikvadratu racionalna broja, a broj -1, ako je 2 kongruentan kvadratu racionalna broja, ali ne više bikvadratu takova broja, s obzirom na modul p, moći ćemo dobivene resultate sabrati u jedno i napisati, da je

$$e \equiv 0, \ (8), \quad \text{ako je} \quad (-1)^{\frac{p-1}{8}} \left(\left(\frac{2}{p}\right)\right) = +1,$$

a

$$e \equiv 4, \ (8), \quad \text{ako je} \quad (-1)^{\frac{p-1}{8}} \left(\left(\frac{2}{p}\right)\right) = -1.$$

U prvom je slučaju prema onome, što je gore rečeno, realna čest broja $\psi_6(\rho)$ kongruentna -1, a u drugom kongruentna $+1$ s obzirom na modul 4. Ako nam dakle π ima ono isto značenje što ga imađaše u jednadžbi (11), valja relacija

$$\psi_6(\rho) = -(-1)^{\frac{p-1}{8}} \left(\left(\frac{2}{p}\right)\right) \pi . ss'\pi.$$

Digitized by Google

Obazremo li se sada još na jednadžbe (11), (22), (30) i na relacije (19) predašnjega paragrafa, sastavit ćemo dobivene resultate konačno ovako:

Ako je $\pi = a + b\varrho + c\varrho^2 + d\varrho^3$ *primaran prost broj tijela* $k(\varrho)$ *sadržan kao faktor u brojevima* $\psi_1(i)$, $\psi_1(\varrho)$, *to valjaju jednadžbe*

$$-\psi_1(i) = \pi.s\pi, \quad -\psi_5(\varrho) = \left(\left(\frac{2}{p}\right)\right)\pi.s\pi, \quad -\psi_2(\varrho) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}\left(\left(\frac{2}{p}\right)\right)\pi.s\pi,$$

$$(44) \qquad -\psi_4(\varrho) = \pi.ss'\pi, \quad -\psi_3(\varrho) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}\pi.ss'\pi,$$

$$-\psi_1(\varrho) = \left(\left(\frac{2}{p}\right)\right)\pi.ss'\pi, \quad -\psi_6(\varrho) = (-1)^{\frac{p-1}{8}}\left(\left(\frac{2}{p}\right)\right)\pi.ss'\pi.$$

Prema tomu možemo jednadžbu (22) § 3. napisati također ovako:

$$(45) \qquad (\varrho, r)^8 = \pi^7 . s\pi^3 . s'\pi . ss'\pi^5.$$

§ 5.

Zakon recipročnosti među racionalnim i kompleksnim brojem.

Poznato je iz teorije dijeljenja kruga, ako je $-\psi_2(i) = m + ni$, da se primitivni korijen kongruencije g s obzirom na modul p uvijek dade tako odrediti, da bude

$$(1) \qquad m + ng^{\frac{p-1}{4}} \equiv 0, \quad (p).$$

No budući da je

$$m + ni \equiv 0, \quad (m + ni),$$

izlazi odatle, da je

$$(2) \qquad g^{\frac{p-1}{4}} \equiv i, \quad (m + ni).$$

Pokazat ćemo, da se g može tako odrediti, da ne zadovoljava samo tu kongruenciju, nego i ovu

Digitized by Google

$$g^{\frac{p-1}{8}} \equiv \rho, \quad (\pi), \tag{3}$$

gdje nam π ima isto značenje kao u predašnjem paragrafu.

Prije smo bili stavili

$$m+ni = \pi . s\pi = (a+b\rho+c\rho^2+d\rho^3)\,(a-b\rho+c\rho^2-d\rho^3);$$

dakle je

$$m+ni = (a^2-c^2+2bd) - (b^2-d^2-2ac)\,i. \tag{4}$$

Lako se sada uvjerimo, ako se obazremo na (1) i (4), da je valjana kongruencija

$$\left\{a+cg^{\frac{p-1}{4}}+\left(b+dg^{\frac{p-1}{4}}\right)g^{\frac{p-1}{8}}\right\}\left\{a+cg^{\frac{p-1}{4}}-\left(b+dg^{\frac{p-1}{4}}\right)g^{\frac{p-1}{8}}\right\} \equiv 0, \quad (p); \tag{5}$$

treba se pri tom samo sjetiti, da je

$$g^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1, \quad (p).$$

Iz (5) izlazi, da je ili prvi faktor s lijeve strane ili drugi djeljiv sa p. Pokazat ću, da se može g uvijek tako odrediti, da bude

$$a+cg^{\frac{p-1}{4}}+\left(b+dg^{\frac{p-1}{4}}\right)g^{\frac{p-1}{8}} \equiv 0, \quad (p). \tag{6}$$

Kada ta kongruencija ne bi bila ispravna, morala bi valjati ova:

$$a+cg^{\frac{p-1}{4}}-\left(b+dg^{\frac{p-1}{4}}\right)g^{\frac{p-1}{8}} \equiv 0, \quad (p). \tag{7}$$

Primitivni se korijeni kongruencije za modul p dijele na dvije vrste: na takove, koji su kongruentni g^{4n+1} i na takove, koji su kongruentni g^{4n+3} s obzirom na modul p.[1] Primitivni se korijeni γ prve vrste raspadaju opet na takove, koji su kongruentni

[1] P. Bachmann l. c. str. 134.

Digitized by Google

g^{8k+1}, i na takove, koji su kongruentni g^{8k+5} s obzirom na modul p. U istinu, ako g^λ treba da bude primitivan korijen kongruencije, nužno je, a i dovoljno, da je λ prost broj prema $p-1$. Neka sada bude g^λ primitivan korijen kongruencije broja p, a λ od oblika $4n+1$. Odredimo pozitivni racionalni cijeli broj s tako, da bude

$$\frac{p-1}{2^s} \equiv 4, \quad (8),$$

tada je sigurno i $g^{\frac{p-1}{2^s}+\lambda}$ primitivan korijen kongruencije za broj p, jer je $\frac{p-1}{2^s}+\lambda$ prosto prema $p-1$. Ako je $\lambda \equiv 1$, (8), to je $\frac{p-1}{2^s}+\lambda \equiv 5$, (8) i obrnuto.

Kad bi dakle valjala kongruencija (7), uveli bismo u tu kongruenciju mjesto primitivnoga korijena g primitivni korijen $\gamma = g^{8k+5}$. No budući da je

$$\gamma^{\frac{p-1}{8}} \equiv g^{5.\frac{p-1}{8}} \equiv g^{\frac{p-1}{2}} . g^{\frac{p-1}{8}} \equiv -g^{\frac{p-1}{8}}, \ (p),$$

$$\gamma^{\frac{p-1}{4}} \equiv g^{5.\frac{p-1}{4}} \equiv g^{p-1} . g^{\frac{p-1}{4}} \equiv g^{\frac{p-1}{4}}, \ (p),$$

prešle bi kongruencije (1), (7) tada u ove:

$$m+n\gamma^{\frac{p-1}{4}} \equiv 0, \quad (p)$$

$$a+c\gamma^{\frac{p-1}{4}}+\left(b+d\gamma^{\frac{p-1}{4}}\right)\gamma^{\frac{p-1}{8}} \equiv 0, \quad (p).$$

Stoga možemo uzeti, da je g već tako određen, da budu valjane kongruencije (1) i (6). Tada valja također (2), pak se može (6) i ovako napisati:

$$a+ci+(b+di)g^{\frac{p-1}{8}} \equiv 0, \quad (\pi).$$

Digitized by Google

No budući da je

$$a+ci+(b+di)\rho \equiv 0, \quad (\pi),$$

izlazi iz te dvije kongruencije (3), kako smo prije ustvrdili.

Uvest ćemo pokratu

$$(8) \qquad S_k = (\rho^k, r) = \sum_{s=0}^{p-2} \rho^{ks}\, r^{g^s}$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 7).$$

S pomoću (3) možemo S_k i ovako napisati:

$$(9) \qquad S_k = \sum_{s=0}^{p-2} \left(\frac{g}{\pi}\right)^{ks} r^{g^s} = \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^k r^{\lambda},$$

gdje pod $\left(\frac{g}{\pi}\right)$ razumijevamo Legendre'ov simbol za ostatke osmih potencija u tijelu osmih kružnih jedinica.

Ako stavimo pokraćeno

$$S_k^{(l)} = \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda}{\pi}\right)^k r^{l\lambda},$$

to je

$$(10) \qquad S_k^{(l)} = \left(\frac{l}{\pi}\right)^{-k} S_k.$$

Tom ćemo se formulom češće poslužiti.

Iza tih priprema prelazimo sada k dokazu zakona recipročnosti.

U buduće ćemo razumijevati pod p_1, p_1'; p_3, p_3'; p_5, p_5'; p_7, p_7' pozitivne racionalne proste brojeve, za koje valjaju kongruencije

$$p_1 \equiv 1, \quad p_1' \equiv 1, \quad (8)$$
$$p_3 \equiv 3, \quad p_3' \equiv 3, \quad (8)$$
$$p_5 \equiv 5, \quad p_5' \equiv 5, \quad (8)$$
$$p_7 \equiv 7, \quad p_7' \equiv 7, \quad (8).$$

Digitized by Google

Ako je $p_1 = (m+ni)(m-ni)$, gdje je $m+ni$ uzeto u primarnom obliku, neka bude π_1 primaran prost broj tijela $k(\rho)$, koji je sadržan u $m+ni = -\psi_1(i)$ i u $\psi_1(\rho)$; slično π_1'. Nadalje ćemo staviti $p_5 = \pi_5 \cdot s'\pi_5$, $p_5' = \pi_5' \cdot s'\pi_5'$ tako, da budu π_5, π_5' primarni brojevi. Isto tako neka budu napokon u jednadžbama $-p_3 = \pi_3 \cdot s\pi_3$, $-p_3' = \pi_3' \cdot s\pi_3'$; $-p_7 = \pi_7 \cdot s\pi_7$, $-p_7' = \pi_7' \cdot s\pi_7'$ brojevi π_3, π_3'; π_7, π_7' primarni, kako je to razvijeno u § 2.

I. slučaj. Zakon recipročnosti među racionalnim prostim brojem i kompleksnim prostim brojem π_1.

Neka bude r primitivan p_1-ti korijen jedinice, a g primitivan korijen kongruencije za broj p_1 određen prema kongruenciji

$$g^{\frac{p_1-1}{8}} \equiv \rho, \quad (\pi_1).$$

Stavimo tada

$$S_k = \sum_{s=0}^{p-2} \left(\frac{g}{\pi_1}\right)^{ks} r^{g^s} = \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda}{\pi_1}\right)^k r^{\lambda},$$

$$(k = 1, 2, \ldots, 7).$$

1) Da nađemo gornji zakon recipročnosti, ako je racionalni prosti broj od oblika p_1', dići ćemo S_7 na p_1'-tu potenciju te ćemo se obazreti na jednadžbu (10). Tako ćemo dobiti kongruenciju

$$S_7^{p_1'} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda}{\pi_1}\right)^{7p_1'} r^{p_1'\lambda} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda}{\pi_1}\right)^7 r^{p_1'\lambda} \equiv \left(\frac{p_1'}{\pi_1}\right) S_7, \quad (p_1').$$

Iz nje izlazi dalje, da je

$$\left\{ S_7^{p_1'-1} - \left(\frac{p_1'}{\pi_1}\right) \right\} S_7 \equiv 0, \quad (p_1')$$

ili, budući da je S_7 prosto prema p_1'.

$$S_7^{p_1'-1} \equiv \left(\frac{p_1'}{\pi_1}\right), \quad (p_1').$$

Tu kongruenciju možemo također ovako napisati:

Digitized by Google

$$\left(S_7{}^8\right)^{\frac{p_1'-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_1'}{\pi_1}\right), \quad (\pi_1').$$

Obazremo li se sada na jednadžbu (45) § 4., moći ćemo staviti

$$S_7{}^8 = p_1\psi_1{}^4(\rho^7)\psi_1{}^2(-i) = \pi_1 . s\pi_1{}^5 . s'\pi_1{}^7 . ss'\pi_1{}^3.$$

Prema tomu daje nam zadnja kongruencija snošaj

$$\left(\frac{\pi_1}{\pi_1'}\right)\left(\frac{s\pi_1}{\pi_1'}\right)^5\left(\frac{s'\pi_1}{\pi_1'}\right)^7\left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_1'}\right)^3 = \left(\frac{p_1'}{\pi_1}\right).$$

No budući da je

$$\left(\frac{s\pi_1}{\pi_1'}\right)^5 = \left(\frac{\pi_1}{s\pi_1'}\right), \quad \left(\frac{s'\pi_1}{\pi_1'}\right)^7 = \left(\frac{\pi_1}{s'\pi_1'}\right), \quad \left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_1'}\right)^3 = \left(\frac{\pi_1}{ss'\pi_1'}\right),$$

izlazi konačno traženi zakon recipročnosti u obliku

$$\left(\frac{\pi_1}{p_1'}\right) = \left(\frac{p_1'}{\pi_1}\right). \tag{11}$$

2) Ako je nadalje racionalni prosti broj od oblika p_5, dići ćemo S_3 na p_5, pak ćemo dobiti

$$S_3{}^{p_5} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p_1-1}\left(\frac{\lambda}{\pi_1}\right)^{3p_5} r^{p_5\lambda} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p_1-1}\left(\frac{\lambda}{\pi_1}\right)^{7} r^{p_5\lambda} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right) S_7, \quad (p_5).$$

Pomnožimo li sada obje strane te kongruencije sa $S_3{}^3$, izići će nam relacija

$$S_3{}^{p_5+3} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right) S_3{}^3 S_7, \quad (p_5). \tag{12}$$

S pomoću jednadžbe (5) § 3. možemo napisati

$$\begin{aligned} S_3{}^3 &= (\rho^3, r)^3 = (\rho, r)\psi_1(\rho^3)\psi_2(\rho^3) \\ &= S_1\,\psi_1(\rho)\,\psi_2(\rho^3). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Iz (44) § 4. izvodimo, da je

$$-\psi_2(\rho^5) = (-1)^{\frac{p_1-1}{8}}\left(\left(\frac{2}{p_1}\right)\right) s'\pi_1 . ss'\pi_1 .$$

Stoga je

$$S_3{}^8 = (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} S_1\, s'\pi_1 . ss'\pi_1 .$$

Uvrstimo li to u desnu stranu kongruencije (12), to će nam, budući da je $S_1 S_7 = (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} p_1$, izići

$$\left(S_3{}^8\right)^{\frac{p_5+3}{8}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right) p_1 \pi_1 . s'\pi_1 . ss'\pi_1{}^2, \quad (p_5).$$

No kako je

$$S_3{}^8 = \pi_1{}^5 . s\pi_1 . s'\pi_1{}^3 . ss'\pi_1{}^7,$$

moći ćemo zadnjoj kongruenciji podati ovaj oblik:

$$(13)\quad \left(\pi_1{}^5 . s\pi_1 . s'\pi_1{}^3 . ss'\pi_1{}^7\right)^{\frac{p_5+3}{8}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right) \pi_1{}^2 . s\pi_1 . s'\pi_1 . ss'\pi_1{}^2, \quad (p_5).$$

Budući pak da je

$$\pi_1{}^{p_5} \equiv s\pi_1, \qquad ss'\pi_1{}^{p_5} \equiv s'\pi_1, \quad (p_5),$$

možemo (13) napisati i ovako:

$$\left(\pi_1{}^{p_5+5} . ss'\pi_1{}^{3p_5+7}\right)^{\frac{p_5+3}{8}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right) \pi_1{}^{p_5+2} . ss'\pi_1{}^{2p_5+3}, \ (p_5).$$

Podijelimo li obje strane te kongruencije sa $\pi_1{}^{p_5+2} . ss'\pi_1{}^{2p_5+3}$, dobit ćemo dalje, da je

$$\pi_1{}^{\frac{p_5{}^2-1}{8}} . ss'\pi_1{}^{\frac{3(p_5{}^2-1)}{8}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right), \quad (\pi_5),$$

Digitized by Google

a prema tome jednadžbu

$$\left(\frac{\pi_1}{\pi_5}\right)\left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_5}\right)^3 = \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right).$$

Obazremo li se sada još na to, da je

$$\left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_5}\right)^3 = \left(\frac{\pi_1}{ss'\pi_5}\right),$$

pak da je $\pi_5 . ss'\pi_5 = p_5$, izići će nam napokon snošaj

$$\left(\frac{\pi_1}{p_5}\right) = \left(\frac{p_5}{\pi_1}\right).$$

3) Sada neka bude racionalni prosti broj od oblika p_3. Dignemo li S_5 na p_3-tu potenciju, dobit ćemo

$$S_5^{p_3} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p_1-1}\left(\frac{\lambda}{\pi_1}\right)^{5p_3} r^{p_3\lambda} \equiv \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right) S_7, \quad (p_3).$$

Pomnožimo li obje strane te kongruencije sa S_5, izvest ćemo relaciju

$$S_5^{p_3+5} \equiv \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right) S_5{}^5 S_7, \quad (p_3). \tag{14}$$

Iz jednadžbe (5) § 3. izvodimo, da je

$$S_5{}^5 = (\rho^5, r)^5 = (\rho, r)\psi_1(\rho^5)\psi_2(\rho^5)\psi_3(\rho^5)\psi_4(\rho^5).$$

Obazremo li se pak na (21) § 3. i na relacije (44) § 4., moći ćemo tu jednadžbu svesti na oblik

$$S_5{}^5 = \left(\left(\frac{2}{p_1}\right)\right) S_1\psi_1(i)\psi_1{}^3(\rho^5).$$

Uvedemo li napokon za $\psi_1(i)$ i $\psi_1(\rho^5)$ vrijednosti prema (44) § 4., izvest ćemo

$$S_5{}^5 = S_1\pi_1 . s\pi_1{}^4 . s'\pi_1{}^3.$$

Digitized by Google

Uvrstimo to sad u desnu stranu kongruencije (14). Izići će

$$\left(S_5{}^8\right)^{\frac{p_3+5}{8}} \equiv (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right) p\pi_1 . s\pi_1{}^4 . s'\pi_1{}^3, \quad (p_3)$$

ili dalje

$$\text{(15)} \quad \left(\pi_1{}^3 . s\pi_1{}^7 . s'\pi_1{}^5 . ss'\pi_1\right)^{\frac{p_3+5}{8}} \equiv (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right) \pi_1{}^3 . s\pi_1{}^5 . s'\pi_1{}^4 . ss'\pi_1, \quad (p_3).$$

No budući da je

$$\pi_1{}^{p_3} \equiv ss'\pi_1, \quad s'\pi_1{}^{p_3} \equiv s\pi_1, \quad (p_3),$$

moći ćemo (15) i ovako napisati:

$$\left(\pi_1{}^{p_3+3} . s'\pi_1{}^{7p_3+5}\right)^{\frac{p_3+5}{8}} \equiv (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right) \pi_1{}^{p_3+2} . s'\pi_1{}^{5p_3+4}, \quad (p_3).$$

Razdijelimo li sada obje strane te kongruencije sa

$$\pi_1{}^{p_3+2} . s'\pi_1{}^{5p_3+4},$$

dobit ćemo

$$\pi_1{}^{\frac{p_3{}^2-1}{8}} . s'\pi_1{}^{\frac{7(p_3{}^2-1)}{8}} \equiv (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right), \quad (\pi_3)$$

ili dalje

$$\left(\frac{\pi_1}{\pi_3}\right)\left(\frac{s'\pi_1}{\pi_3}\right)^7 = (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} \left(\frac{p_3}{\pi_1}\right).$$

No kako je

$$\left(\frac{s'\pi_1}{\pi_3}\right)^7 = \left(\frac{\pi_1}{s'\pi_3}\right), \quad (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} = \left(\frac{-1}{\pi_1}\right),$$

a $\pi_3 . s'\pi_3 = -p_3$, izlazi napokon jednostavna relacija

$$\left(\frac{\pi_1}{p_3}\right) = \left(\frac{-p_3}{\pi_1}\right).$$

Digitized by Google

4) Još ostaje, da uzmemo, da je racionalni prosti broj od oblika p_7.

Dignemo li S_1 na p_7-tu potenciju, naći ćemo kao u predašnjim slučajevima snošaj

$$S_1^{p_7} \equiv \left(\frac{p_7}{\pi_1}\right) S_7, \quad (p_7).$$

Pomnožimo li obje strane te kongruencije sa S_1, dobit ćemo

$$S_1^{p_7+1} \equiv \left(\frac{p_7}{\pi_1}\right) S_1 S_7, \quad (p_7)$$

ili dalje

$$\left(S_1^{\,8}\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv (-1)^{\frac{p_1-1}{8}} \left(\frac{p_7}{\pi_1}\right) p_1, \quad (p_7).$$

Izrazimo li pak $S_1^{\,8}$ i p s pomoću veličina π_1, $s\pi_1$, $s'\pi_1$, $ss'\pi_1$, izići će nam

$$(16) \quad \left(\pi_1^{\,7} . s\pi_1^{\,3} . s\pi_1 . ss'\pi_1^{\,5}\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_1}\right) \pi_1 . s\pi_1 . s'\pi_1 . ss'\pi_1, \quad (p_7).$$

Kako je

$$\pi_1^{\,p_1} \equiv s'\pi_1, \quad s\pi_1^{\,p_7} \equiv ss'\pi_1, \quad (p_7),$$

moći ćemo (16) napisati u obliku

$$\left(\pi_1^{\,p_7+7} . s\pi_1^{\,3p_7+5}\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_1}\right) \pi_1^{\,p_7+1} . s\pi_1^{\,p_7+1}, \quad (p_7),$$

a ako obje strane te kongruencije razdijelimo sa $\pi_1^{\,p_7+1} . s\pi_1^{\,p_7+1}$, još jednostavnije ovako:

$$\pi_1^{\frac{p_7^2}{8}-1} . ss'\pi_1^{\frac{3(p_7^2-1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_1}\right), \quad (\pi_7).$$

To se dade prikazati u obliku jednadžbe

$$\left(\frac{\pi_1}{\pi_7}\right)\left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_7}\right)^3 = \left(\frac{-p_7}{\pi_1}\right),$$

Digitized by Google

a budući da je

$$\left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_7}\right)^3 = \left(\frac{\pi_1}{ss'\pi_7}\right),$$

izlazi napokon

$$(16^*) \qquad \left(\frac{\pi_1}{p_7}\right) = \left(\frac{-p_7}{\pi_1}\right).$$

II. slučaj. Zakon recipročnosti među racionalnim prostim brojem i kompleksnim prostim brojem π_5.

Ako se primitivni korijen kongruencije g za modul p odredi prema kongruenciji

$$g^{\frac{p_5-1}{4}} \equiv i, \quad (\pi_5),$$

izlazi iz te kongruencije, ako se ona digne na $\frac{p_5+1}{2}$-tu potenciju, relacija

$$g^{\frac{p_5^2-1}{8}} \equiv i^3, \quad (\pi_5);$$

dakle je

$$\left(\frac{g}{\pi_5}\right) = i^3.$$

S pomoću te jednadžbe možemo zbroj S_{2k} napisati u obliku

$$S_{2k} = \sum_{s=0}^{p_5-2} \left(\frac{g}{\pi_5}\right)^{3ks} r^{g^s} = \sum_{\lambda=1}^{p_5-1} \left(\frac{\lambda}{\pi_5}\right)^{3k} r^{\lambda},$$

gdje nam sada r predočuje primitivan p_5-ti korijen jedinice.

Uzmimo, da je

1) racionalni prosti broj od oblika p_1. Dignemo li tada S_2 na p_1-tu potenciju, dobit ćemo

$$S_2^{p_1} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p_5-1} \left(\frac{\lambda}{\pi_5}\right)^3 r^{p_1\lambda} \equiv \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right) S_2, \quad (p_1).$$

Digitized by Google

Odatle izvodimo dalje, da je

$$S_2^{p_1-1} \equiv \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right), \quad (p_1).$$

Napišemo li tu kongruenciju u obliku

$$\left(S_2^{\,8}\right)^{\frac{p_1-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right), \quad (p_1), \tag{17}$$

i obazremo li se na to, da je

$$S_2^{\,4} = p_5 \pi_5^{\,2} = \pi_5^{\,3} \,.\, s'\pi_5 ,$$

izvest ćemo iz (17) kongruenciju

$$\left(\pi_5^{\,6} \,.\, s'\pi_5^{\,2}\right)^{\frac{p_1-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right), \quad (\pi_1),$$

a odavde jednadžbu

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_1}\right)^6 \left(\frac{s'\pi_5}{\pi_1}\right)^2 = \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right).$$

No budući da je $s'\pi_5 = ss'\pi_5$, možemo tu jednadžbu prikazati također u obliku

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{\pi_1}\right)^5 \left(\frac{s'\pi_5}{\pi_1}\right)\left(\frac{ss'\pi_5}{\pi_1}\right) = \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right).$$

U toj jednadžbi smijemo staviti

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_1}\right)^5 = \left(\frac{\pi_5}{s\pi_1}\right),$$
$$\left(\frac{s'\pi_5}{\pi_1}\right) = \left(\frac{\pi_5}{s'\pi_1}\right)^7,$$
$$\left(\frac{ss'\pi_5}{\pi_1}\right) = \left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_1}\right)^3.$$

Učinimo li to, dobit ćemo, da je

Digitized by Google

$$(18) \qquad \left(\frac{\pi_5}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{s\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{s'\pi_1}\right)^7\left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_1}\right)^3 = \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right).$$

Ako je sada

$$\left(\frac{\pi_5}{s'\pi_1}\right) = \rho^\sigma,$$

to je

$$\left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_1}\right) = \rho^{5\sigma},$$

a

$$\left(\frac{\pi_5}{s'\pi_1}\right)^7\left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_1}\right)^3 = \rho^{22\sigma} = \rho^{6\sigma} = \left(\frac{\pi_5}{s'\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_1}\right).$$

Stoga daje (18) novu jednadžbu

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{s\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{s'\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_1}\right) = \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right),$$

a ova se dade prikazati u jednostavnom obliku

$$\left(\frac{\pi_5}{p_1}\right) = \left(\frac{p_1}{\pi_5}\right).$$

2) Dignemo li S_6 na p_5'-tu potenciju, izići će snošaj

$$S_6^{p_5'} \equiv \sum_{\lambda=1}^{p_5-1}\left(\frac{\lambda}{\pi_5}\right)^{p_5'} {}_r p_5' s \equiv \sum_{\lambda=1}^{p_5-1}\left(\frac{\lambda}{\pi_5}\right)^3 {}_r p_5' s \equiv \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right)^3 S_6, \quad (p_5').$$

Poradi toga je

$$(19) \qquad S_6^{p_5'-1} \equiv \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right)^3, \quad (p_5').$$

No budući da je

$$(20) \qquad S_6^4 = p_5 \,.\, ss'\pi_5^2 = \pi_5 \,.\, ss'\pi_5^3,$$

izići će nam, ako (19) napišemo u obliku

*

Digitized by Google

$$\left(S_6^4\right)^{\frac{p_5'-1}{4}} \equiv \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right)^3, \quad (p_5'),$$

s obzirom na (20)

$$\left(\pi_5 . ss'\pi_5^3\right)^{\frac{p_5'-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right)^3, \quad (p_5').$$

Dignemo li tu kongruenciju na $\frac{p_5'+1}{2}$-tu potenciju, dobit ćemo, ako se sjetimo, da je

$$\left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right) = i^n,$$

$$\left(\pi_5 . ss'\pi_5^3\right)^{\frac{p_5'^2-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right), \quad (\pi_5'),$$

a to možemo napisati u obliku jednadžbe

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_5'}\right)\left(\frac{ss'\pi_5}{\pi_5'}\right)^3 = \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right). \tag{21}$$

Sada je

$$\left(\frac{ss'\pi_5}{\pi_5'}\right)^3 = \left(\frac{\pi_5}{ss'\pi_5'}\right),$$

te stoga izvodimo iz (21) jednostavnu relaciju

$$\left(\frac{\pi_5}{p_5'}\right) = \left(\frac{p_5'}{\pi_5}\right).$$

3) Dignimo sada S_6 na p_3-tu potenciju. Izići će

$$S_6^{p_3} \equiv \sum_{s=1}^{p_5-1} \left(\frac{s}{\pi_5}\right)^3 r^{p_3 s} \equiv \left(\frac{p_3}{\pi_5}\right) S_2, \quad (p_3).$$

Ako tu kongruenciju pomnožimo sa S_6^5, dobit ćemo

$$S_6^{p_3+5} \equiv \left(\frac{p_3}{\pi_5}\right)(S_2 S_6)\, S_6^4, \quad (p_3). \tag{22}$$

Digitized by Google

Obazremo li se na to, da je

$$S_2 S_6 = -p_5 = -\pi_5 \cdot s'\pi_5,$$
$$S_6^4 = p_5 \cdot s'\pi_5^2 = \pi_5 \cdot s'\pi_5^3,$$

napisat ćemo (22) u obliku

$$(23) \qquad \left(\pi_5^2 . s'\pi_5^6\right)^{\frac{p_3+5}{8}} \equiv \left(\frac{-p_3}{\pi_5}\right) \pi_5^2 \cdot s'\pi_5^4, \quad (p_3).$$

No postoji kongruencija

$$s'\pi_5 \equiv \pi_5^{p_3} \quad (p_3);$$

stoga se dade (23) prikazati i u ovom obliku:

$$\left(\pi_5^{6p_3+2}\right)^{\frac{p_3+5}{8}} \equiv \left(\frac{-p_3}{\pi_5}\right) \pi_5^{4p_3+2}, \quad (p_3).$$

Razdijelimo li obje strane te kongruencije sa $\pi_5^{4p_3+2}$, izvest ćemo relaciju

$$\pi_5^{\frac{6(p_3^2-1)}{8}} \equiv \left(\frac{-p_3}{\pi_5}\right), \quad (\pi_3),$$

a iz nje izlazi, da je

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_3}\right)^6 = \left(\frac{-p_3}{\pi_5}\right).$$

No budući da je

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_3}\right)^5 = \left(\frac{\pi_5}{s\pi_3}\right),$$

lako ćemo se uvjeriti o ispravnosti snošaja

$$\left(\frac{\pi_5}{p_3}\right) = \left(\frac{-p_3}{\pi_5}\right).$$

4) Uzmnožimo sada S_6 sa p_7. Kao i prije izvest ćemo relaciju

Digitized by Google

$$S_6^{p_7} \equiv \sum_{s=1}^{p_5-1} \left(\frac{s}{\pi_5}\right)^3 {}_7 p_7 s \equiv \left(\frac{p_7}{\pi_5}\right) S_2, \quad (p_7).$$

Pomnožimo li obje strane te kongruencije sa S_6 i sjetimo li se, da je

$$S_2 S_6 = -p_5,$$

dobit ćemo kongruenciju

$$\left(S_6{}^8\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_5}\right) p_5, \quad (p_7).$$

Izrazimo sada $S_6{}^8$ i p_5 brojevima π_5, $s'\pi_5$. Tako ćemo dobiti

$$(24) \qquad \left(\pi_5{}^2 . s'\pi_5{}^6\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_5}\right) \pi_5 \, . \, s'\pi_5, \quad (p_7).$$

No budući da je

$$s'\pi_5 \equiv \pi_5{}^{p_7}, \quad (p_7),$$

možemo (24) napisati također u obliku

$$\left(\pi_5{}^{6p_7+2}\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_5}\right) \pi_5{}^{p_7+1}, \quad (p_7).$$

Razdijelimo li obje strane te kongruencije sa $\pi_5{}^{p_7+1}$, izvest ćemo, da je

$$\pi_5{}^{\frac{6(p_7{}^2-1)}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_5}\right), \quad (\pi_7)$$

ili

$$\left(\frac{\pi_5}{\pi_7}\right)^6 \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_5}\right).$$

Odatle izlazi, kao pod točkom 3), da je

$$\left(\frac{\pi_5}{p_7}\right) = \left(\frac{-p_7}{\pi_5}\right).$$

Digitized by Google

III. slučaj. Zakon recipročnosti među racionalnim prostim brojem i kompleksnim prostim brojem od oblika π_3.

Ako nam g predočuje primitivan korijen kongruencije za broj p_3, to je

$$g^{\frac{p_3-1}{2}} \equiv -1, \quad (p_3).$$

Uzmnožimo li tu kongruenciju sa $\frac{p_3+1}{4}$, dobit ćemo

$$g^{\frac{p_3^2-1}{8}} \equiv -1, \quad (p_3)$$

ili dalje, da je

$$\left(\frac{g}{\pi_3}\right) = -1. \tag{25}$$

Označimo li sa S_4 zbroj

$$S_4 = \sum_{s=0}^{p-2} (-1)^s r g^s,$$

gdje nam r predočuje p_3-ti korijen jedinice, dat će se taj zbroj S_4 s pomoću jednadžbe (25) napisati u obliku

$$S_4 = \sum_{s=0}^{p-2} \left(\frac{g}{\pi_3}\right)^s r g^s = \sum_{\lambda=1}^{p-1} \left(\frac{\lambda}{\pi_3}\right) r^\lambda.$$

Ako je q kojigod racionalan prost broj, uvijek je

$$S_4^q \equiv \left(\frac{q}{\pi_3}\right) S_4, \quad (q). \tag{26}$$

Tim ćemo se sada poslužiti.

1) Neka bude q ponajprije od oblika p_1, tada ćemo iz (26) lako izvesti relaciju

$$\left(S_4^8\right)^{\frac{p_1-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right), \quad (\pi_1).$$

Digitized by Google

Budući da je nadalje

$$S_4^2 = p_3,$$

zaključit ćemo, da je

$$\left(p_3^4\right)^{\frac{p_1-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right), \quad (\pi_1),$$

ili još dalje, da je

$$\left(\frac{p_3}{\pi_1}\right)^4 = \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right).$$

Tu jednadžbu možemo također ovako napisati:

$$(27) \qquad \left(\frac{\pi_3}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_3}{\pi_1}\right)^3\left(\frac{s\pi_3}{\pi_1}\right)\left(\frac{s\pi_3}{\pi_1}\right)^3 = \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right).$$

Budući pak da je $ss'\pi_3 = \pi_3$, bit će

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_1}\right)^3 = \left(\frac{\pi}{ss'\pi_1}\right);$$

nadalje je

$$\left(\frac{s\pi_3}{\pi_1}\right) = \left(\frac{\pi_3}{s\pi_1}\right)^5 = \left(\frac{\pi_3}{s'\pi_1}\right)^7,$$

tako da možemo (27) prikazati u obliku

$$(28) \qquad \left(\frac{\pi_3}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_3}{ss'\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_3}{s\pi_1}\right)^5\left(\frac{\pi_3}{s'\pi_1}\right)^5 = \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right).$$

No kako je

$$\left(\frac{\pi_3}{s\pi_1}\right)^5\left(\frac{\pi_3}{s'\pi_1}\right)^5 = \left(\frac{s\pi_3}{\pi_1}\right)^4 = \pm 1,$$

to mora biti

$$\left(\frac{\pi_3}{s\pi_1}\right)^5\left(\frac{\pi_3}{s'\pi_1}\right)^5 = \left(\frac{\pi_3}{s\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_3}{s'\pi_1}\right),$$

Digitized by Google

pak prema tomu daje (28) jednostavnu relaciju

$$\left(\frac{\pi_3}{p_1}\right) = \left(\frac{p_1}{\pi_3}\right).$$

2) Stavimo nadalje u (26) za q prost broj p_5. Lako ćemo uvidjeti, da je tada

$$\left(S_4^4\right)^{\frac{p_5-1}{4}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right), \quad (p_5),$$

ili i dalje, da je

$$\left(p_3^2\right)^{\frac{p_5-1}{4}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right), \quad (p_5).$$

Uzmnožimo li tu kongruenciju sa $\frac{p_5+1}{2}$, izići će

$$\left(p_3^2\right)^{\frac{p_5^2-1}{8}} \equiv \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right), \quad (\pi_5)$$

ili napisano u obliku jednadžbe

$$\left(\frac{p_3}{\pi_5}\right)^2 = \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right).$$

To se dade napisati također ovako:

$$(29) \qquad \left(\frac{\pi_3}{\pi_5}\right)^2 \left(\frac{s\pi_3}{\pi_5}\right)^2 = \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right),$$

a budući da je

$$\left(\frac{s\pi_3}{\pi_5}\right) = \left(\frac{\pi_3}{\pi_5}\right)^5,$$

izlazi iz (29), da je

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_5}\right)^4 = \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right).$$

Obazremo li se sada još na to, da je

Digitized by Google

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_5}\right)^3 = \left(\frac{\pi_3}{ss'\pi_5}\right)^3,$$

dobit ćemo napokon zakon recipročnosti u obliku

$$\left(\frac{\pi_3}{p_5}\right) = \left(\frac{p_5}{\pi_3}\right).$$

3) Uzmimo nadalje za q u (26) prost broj p_3'. Tada je

$$S_4^{\frac{p_3'-1}{2}} \equiv \left(\frac{p_3'}{\pi_3}\right), \quad (p_3'). \tag{30}$$

Budući pak da je

$$S_4^2 = -p_3,$$

izlazi iz (30), da je

$$p_3^{\frac{p_3'-1}{2}} \equiv \left(\frac{-p_3'}{\pi_3}\right), \quad (p_3'),$$

ili ako dignemo na $\frac{p_3'+1}{4}$-tu potenciju,

$$\left(\frac{p_3}{\pi_3'}\right) = \left(\frac{-p_3'}{\pi_3}\right).$$

Stavimo li $p_3 = \pi_3 . s\pi_3$, dobit ćemo

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_3'}\right)\left(\frac{s\pi_3}{\pi_3'}\right) = \left(\frac{-p_3'}{\pi_3}\right)$$

ili dalje

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_3'}\right)\left(\frac{\pi_3}{s\pi_3'}\right)^5 = \left(\frac{\pi_3}{p^{3'}}\right)\left(\frac{\pi_3}{s\pi_3'}\right)^4 = \left(\frac{-p_3'}{\pi_3}\right). \tag{31}$$

No kako je

$$\left(\frac{\pi_3}{s\pi_3'}\right) = \left(\frac{\pi_3}{s\pi_3'}\right)^3,$$

mora da bude

$$\left(\frac{\pi_3}{s\pi_3'}\right) = \pm 1,$$

Digitized by Google

a prema tomu daje (31) konačno relaciju

$$\left(\frac{\pi_3}{p_3'}\right) = \left(\frac{-p_3'}{\pi_3}\right).$$

4) Još nam ostaje, da stavimo u (26) za q prost broj p_7. Učinimo li to, izvest ćemo lako kongruenciju

$$S_4^{p_7+1} \equiv \left(\frac{p_7}{\pi_3}\right) S_4^2, \quad (p_7),$$

kojoj možemo podijeliti oblik

$$\left(S_4^8\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_3}\right) p_3, \quad (p_7).$$

Stavimo sada $S_4^2 = -p_3$, $p_3 = \pi_3 . s\pi_3$, pak će nam izići

$$\left(p_3^4\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_3}\right) \pi_3 . s\pi_3, \quad (p_7),$$

a budući da je

$$s\pi_3 \equiv \pi_3^{p_7}, \quad (p_7),$$

izvodimo dalje, da je

$$\left(\pi_3^{4p_7+4}\right)^{\frac{p_7+1}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_3}\right) \pi_3^{p_7+1}, \quad (p_7).$$

Razdijelimo sada cijelu tu kongruenciju sa $\pi_3^{p_7+1}$. Tako će nam izići snošaj

$$\pi_3^{\frac{4(p_7^2-1)}{8}} \equiv \left(\frac{-p_7}{\pi_3}\right), \quad (\pi_7)$$

ili

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_7}\right)^4 = \left(\frac{-p_7}{\pi_3}\right). \tag{32}$$

Budući pak da je

$$\left(\frac{\pi_3}{\pi_7}\right)^3 = \left(\frac{\pi_3}{ss'\pi_7}\right),$$

Digitized by Google

daje (32) jednostavnu relaciju

$$\left(\frac{\pi_3}{p_7}\right) = \left(\frac{-p_7}{\pi_3}\right).$$

IV. slučaj. Zakon recipročnosti među racionalnim prostim brojem i kompleksnim prostim brojem od oblika π_7.

Ako nam g predočuje primitivan korijen kongruencije za p_7, to je tada

$$g^{\frac{p_7-1}{2}} \equiv -1, \quad (p_7).$$

Uzmnožimo li tu kongruenciju sa $\frac{p_7+1}{4}$, dobit ćemo

$$g^{\frac{p_7^2-1}{8}} \equiv +1, \quad (p_7)$$

ili u obliku jednadžbe

$$\left(\frac{g}{\pi_7}\right) = +1.$$

Svaki je dakle racionalni cijeli broj u tijelu $k(\rho)$ ostatak osme potencije s obzirom na modul π_7.

1) Prosti se broj p_1 dade uvijek prikazati u obliku

$$p_1 = \pi_1 \cdot s\pi_1 \cdot s'\pi_1 \cdot ss'\pi_1.$$

Stoga je

$$\begin{aligned}\left(\frac{p_1}{\pi_7}\right) &= \left(\frac{\pi_1}{\pi_7}\right)\left(\frac{s\pi_1}{\pi_7}\right)\left(\frac{s'\pi_1}{\pi_7}\right)\left(\frac{ss'\pi_1}{\pi_7}\right) \\ &= \left(\frac{\pi_1}{\pi_7}\right)\left(\frac{\pi_1}{s\pi_7}\right)^5\left(\frac{s'\pi_1}{\pi_7}\right)\left(\frac{s'\pi_1}{s\pi_7}\right)^5 \\ &= \left(\frac{\pi_1}{p_7}\right)\left(\frac{s'\pi_1}{p_7}\right)\left(\frac{\pi_1}{s\pi_7}\right)^4\left(\frac{s'\pi_1}{s\pi_7}\right)^4 \\ &= \left(\frac{\pi_1}{p_7}\right)\left(\frac{s'\pi_1}{p_7}\right),\end{aligned} \tag{33}$$

budući da je

$$\left(\frac{s'\pi_1}{s\pi_7}\right) = \left(\frac{\pi_1}{ss'\pi_7}\right)^7 = \left(\frac{\pi_1}{s\pi_7}\right)^7.$$

Digitized by Google

Prema (16*) mora biti

$$\left(\frac{\pi_1}{p_7}\right) = \left(\frac{-p_7}{\pi_1}\right), \quad \left(\frac{s'\pi_1}{p_7}\right) = \left(\frac{-p_7}{s'\pi_1}\right).$$

Zato se može (33) prikazati u obliku

$$\left(\frac{p_1}{\pi_7}\right) = \left(\frac{p_7}{\pi_1}\right)\left(\frac{p_7}{s'\pi_1}\right).$$

Odatle izvodimo dalje, da je

$$\left(\frac{p_1}{\pi_7}\right) = \left(\frac{\pi_7}{\pi_1}\right)\left(\frac{s\pi_7}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_7}{s'\pi_1}\right)\left(\frac{s\pi_7}{s'\pi_1}\right)$$

$$= \left(\frac{\pi_7}{\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_7}{s\pi_1}\right)^5\left(\frac{\pi_7}{s'\pi_1}\right)\left(\frac{\pi_7}{ss'\pi_1}\right)^5 \tag{34}$$

$$= \left(\frac{\pi_7}{p_1}\right)\left(\frac{\pi_7}{s\pi_1}\right)^4\left(\frac{\pi_7}{ss'\pi_1}\right)^4.$$

No budući da je

$$\left(\frac{\pi_7}{ss'\pi_1}\right) = \left(\frac{s'\pi_7}{s\pi_1}\right)^7 = \left(\frac{\pi_7}{s\pi_1}\right)^7,$$

izlazi iz (34) napokon

$$\left(\frac{p_1}{\pi_7}\right) = \left(\frac{\pi_7}{p_1}\right).$$

2) Da dokažemo, da je

$$\left(\frac{p_5}{\pi_7}\right) = \left(\frac{\pi_7}{p_5}\right),$$

treba samo pokazati, da je $\left(\frac{\pi_7}{p_5}\right) = +1$.

Pak u istinu je

$$+1 = \left(\frac{\pi_7}{\pi_5}\right)\left(\frac{\pi_7}{\pi_5}\right)^7 = \left(\frac{\pi_7}{\pi_5}\right)\left(\frac{s'\pi_7}{s'\pi_5}\right) = \left(\frac{\pi_7}{\pi_5}\right)\left(\frac{\pi_7}{s'\pi_5}\right) = \left(\frac{\pi_7}{p_5}\right).$$

Digitized by Google

3) Isto je tako

$$+1 = \left(\frac{\pi_7}{\pi_3}\right)\left(\frac{\pi_7}{\pi_3}\right)^7 = \left(\frac{\pi_7}{\pi_3}\right)\left(\frac{s'\pi_7}{s'\pi_3}\right) = \left(\frac{\pi_7}{\pi_3}\right)\left(\frac{\pi_7}{s'\pi_3}\right) = \left(\frac{\pi_7}{p_3}\right).$$

Dakle je

$$\left(\frac{p_3}{\pi_7}\right) = \left(\frac{\pi_7}{p_3}\right).$$

4) Još nam ostaje, da pokažemo, da je

$$+1 = \left(\frac{p_7'}{\pi_7}\right) = \left(\frac{\pi_7}{p'_7}\right).$$

U istinu imamo ovaj snošaj:

$$(35)\quad \left(\frac{\pi_7}{p_7'}\right) = \left(\frac{\pi_7}{\pi_7'}\right)\left(\frac{\pi_7}{s\pi_7'}\right) = \left(\frac{\pi_7}{\pi_7'}\right)\left(\frac{s\pi_7}{\pi_7'}\right)^5 = \left(\frac{s\pi_7}{\pi_7'}\right)^4\left(\frac{p_7}{\pi_7'}\right)$$
$$= \left(\frac{s\pi_7}{\pi_7'}\right)^4.$$

No budući da je

$$\left(\frac{s\pi_7}{\pi_7'}\right) = \left(\frac{ss'\pi_7}{s'\pi_7'}\right)^7 = \left(\frac{s\pi_7}{\pi_7'}\right)^7,$$

mora biti

$$\left(\frac{s\pi_7}{\pi'_7}\right) = \pm 1,$$

a stoga je prema (35)

$$\left(\frac{\pi_7}{p_7'}\right) = +1,$$

kako smo htjeli da dokažemo.

Dobivene resultate u sva četiri slučaja možemo sastaviti u kratko u ovaj poučak:

Ako je p (pozitivan ili negativan) primaran racionalan prost broj, a $\varkappa$ kojigod primaran prost broj tijela $k(\rho)$, uvijek je

$$(36)\qquad \left(\frac{p}{\varkappa}\right) = \left(\frac{\varkappa}{p}\right).$$

Digitized by Google

Na temelju toga poučka pokazat ćemo odmah, da valja i ovaj općeniji poučak:

Ako je a primaran racionalan broj, a α kojigod primaran broj tijela $k(\rho)$, uvijek je

$$\left(\frac{a}{\alpha}\right) = \left(\frac{\alpha}{a}\right). \tag{37}$$

U istinu, broj se α dade prema onome, što je razvito u § 1., prikazati u obliku

$$\alpha = \varepsilon^{2k} \Pi(\varkappa),$$

gdjeno je $\varepsilon = 1 + \rho - \rho^2$, k cio eksponent, a produkt se Π proteže na same primarne proste brojeve $\varkappa$ tijela $k(\rho)$. Broj pak a možemo uvijek prikazati u obliku

$$a = \Pi(p)\ \Pi(-p_1), \tag{38}$$

gdje se prvi produkt proteže na brojeve p od oblika $p \equiv +1$, (4), a drugi na brojeve p_1 od oblika $p_1 \equiv -1$, (4).

Lako se sada uvjerimo, da je za kojigod racionalan prost broj p

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}\right)^2 = +1.$$

Treba se samo sjetiti, da je $s'\varepsilon = \varepsilon$. Ako je tada $p \equiv 1$, (8), a $p = \pi . s\pi . s'\pi . ss'\pi$, to je

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) &= \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{s\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{s'\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{ss'\pi}\right) \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^5\left(\frac{s'\varepsilon}{\pi}\right)^7\left(\frac{ss'\varepsilon}{\pi}\right)^3 \\ &= \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^5\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^7\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^3 = +1.\end{aligned}$$

Uzmimo nadalje, da je $p \equiv 5$, (8), a $p = \pi . s'\pi$. Tada je

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{s'\pi}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{s'\varepsilon}{\pi}\right)^7 = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)^7 = +1.$$

Digitized by Google

Ako li je pak $p \equiv 3$, (8), a $p = \pi . s\pi$, imamo snošaj

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{s\pi}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^5 = \left(\frac{\varepsilon . s\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^4$$
$$= \left(\frac{-1}{\pi}\right) = -1,$$

budući da je

$$\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right) = \pm 1.$$

Ako je napokon $p \equiv 7$, (8), a $p = \pi . s\pi$, valjat će jednadžba

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{\varepsilon}{s\pi}\right) = \left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right)\left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^5.$$

No budući da je

$$\left(\frac{\varepsilon}{\pi}\right) = \left(\frac{ss'\varepsilon}{ss'\pi}\right)^3 = \left(\frac{s\varepsilon}{\pi}\right)^3,$$

vidimo, da je

$$\left(\frac{\varepsilon}{p}\right) = +1.$$

Prema tomu možemo napisati, da je

$$\left(\frac{\alpha}{a}\right) = \prod\left(\frac{\varkappa}{a}\right),$$

gdjeno valja produkt protegnuti na sve proste brojeve $\varkappa$ sadržane u broju α.

Poradi (38) izvodimo dalje, da je

$$(39) \qquad \left(\frac{\alpha}{a}\right) = \prod\left(\frac{\varkappa}{p}\right)\prod\left(\frac{\varkappa}{p_1}\right).$$

No kako je sada

$$\left(\frac{\varkappa}{p}\right) = \left(\frac{p}{\varkappa}\right), \left(\frac{\varkappa}{p_1}\right) = \left(\frac{-p_1}{\varkappa}\right),$$

izlazi iz (39) doista, da je gornji poučak istinit.

Digitized by Google

Inhaltsangabe.

Im Vorstehenden wird eine genaue Zerlegung der Jacobi'schen Zahlen ψ im Körper der achten Einheitswurzeln gegeben und auf Grund dessen mit Hilfe von Kreisteilungsrelationen das Reciprocitätsgesetz für achte Potenzreste zwischen einer ganzen rationalen und einer beliebigen ganzen Zahl des Körpers der achten Einheitswurzeln abgeleitet.

Digitized by Google

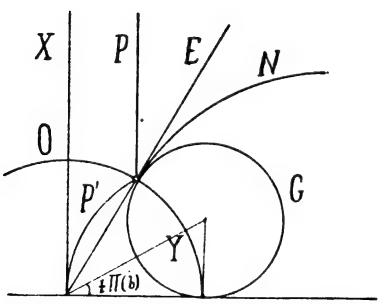
O transformacijama u ravnini Lobačevskoga.

Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 30. svibnja 1906.

NAPISAO PRAVI ČLAN DR. VLADIMIR VARIĆAK.

Nakan sam u ovoj radnji metodom Liejevom izvesti neke transformacije u ravnini Lobačevskoga. Da je proučavanje tih transformacija zamršenije negoli u Euklidovoj ravnini, razbira se već otuda, što na pr. translaciji duž Euklidove osi X odgovaraju u ravnini Lobačevskoga translacije: 1. po paraleli P s osju $+X$, 2. po paraleli P' s osju $-X$, 3. po normali N na os Y, 4. po ekvidistanti E, kojoj je medijana os X, i 5. po graničnome krugu G, komu su premjeri paralelni s osju $+Y$. U Euklidovoj je ravnini

$$P \equiv P' \equiv N \equiv E \equiv G.$$



Slika 1.

Na slici 1. predočene su ove linije na osnovi realne interpretacije hiperbolne geometrije, kako ju je dao Poincaré.[1]

Kod pojedinih transformacija postavit ću najprije njihove jednadžbe u konačnom obliku. Izrazit ću naime luk krivulje, po kojoj se ima tačka gibati jedamput s pomoću apscisa, a drugi put s pomoću ordinata krajnjih tačaka. Tim će se dobiti

[1] Vidi moju radnju: Primjedbe o jednoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga, Rad 154., str. 81—131.

Digitized by Google

$$x_1 = \varphi(x,s), \quad y_1 = \psi(y,s)$$

kao konačne jednadžbe te translacije. Iz njih će se odmah razabrati, da li tim transformacijama pripada svojstvo grupe. Infinitezimalnu transformaciju[2]

$$Uf \equiv \xi(x,y)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta(x,y)\frac{\partial f}{\partial y}$$

dobit ćemo iz prethodnih jednadžbi znajući, da je

$$\xi(x.y) = \left[\frac{dx_1}{ds}\right]_{s=0} = \frac{dx}{ds},$$

$$\eta(x,y) = \left[\frac{dy_1}{ds}\right]_{s=0} = \frac{dy}{ds}.$$

Kod prijelaza na proširenu transformaciju tačke, t. j. na transformaciju linearnoga elementa u ravnini Lobačevskoga valja držati na umu, da kotangens kuta, što ga pravac u nekoj tački zatvora s ordinatom, koja mu odgovara, nije dan sa y' kao u ravnini Euklidovoj, već sa $\frac{y'}{\mathrm{ch}y}$.[3] Linearni je dakle element određen sa $x, y, \frac{y'}{\mathrm{ch}y}$.

Kod svake ćemo transformacije istražiti skupove krivulja $\omega(x,y,C) = 0$, koji su invarijantni ili pod uvjetom $U\omega \equiv 0$ ili pak pod uvjetom $U\omega \equiv f(\omega)$. U prvom skupu invarijantna je svaka krivulja za se; kod transformacije ostaju tačke na istoj krivulji, pa se samo pomiču po njoj. U drugom skupu permutiraju se krivulje među sobom.

Primijetit ćemo još, da su neke od slijedećih translacija proučavane s pomoću transformacije

$$z_1 = \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}.$$

---

[2] Oznaka je ista kao u Lie-Scheffersa: Vorlesungen über Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen. Leipzig 1891.

[3] Iz slike 5. na str. 94. navedene moje radnje vidimo, da je $\mathrm{cotg}\, T = \frac{QT}{MQ}$, a na str. 98. imamo $QT = dy$, $MQ = \mathrm{ch}\, y\, dx$. U ovoj ću radnji pravokutne koordinate Lobačevskoga bilježiti sa x i y; tamo su bilježene sa ξ i η.

*

Digitized by Google

1. Translacija po ekvidistantnoj liniji sa medijanom X. Geometrijsko mjesto krajnjih tačaka jednako dugih normala, uzdignutih na osi X, jest[4] ekvidistantna linija $y = b$. Iz formule za dužinu luka

$$ds = \sqrt{\operatorname{ch}^2 y\, dx^2 + dy^2}$$

dobivamo za luk ove ekvidistantne linije

$$ds = \operatorname{ch} b\, dx,$$

dakle

$$s = (x_1 - x) \operatorname{ch} b,$$

a otuda

$$x_1 = x + \frac{s}{\operatorname{ch} b},$$

dok je (1)

$$y_1 = y.$$

Ovo su konačne jednadžbe ove transformacije, poradi koje tačka M prelazi u M_1. Za prijelaz tačke M_1 u položaj M_2 na istoj ekvidistanti imamo

$$x_2 = x_1 + \frac{s_1}{\operatorname{ch} b},\ y_2 = y_1,$$

ili

$$x_2 = x + \frac{s + s_1}{\operatorname{ch} b},\ y_2 = y.$$

Iz ovih jednadžbi razbiramo, da ovoj transformaciji pripada svojstvo grupe, a to će reći, da su dvije translacije iz skupa translacija, zadanih jednadžbama (1), izvedene jedna za drugom, ekvivalentne s izvjesnom translacijom istoga skupa.

Za $b = 0$ imamo $x_1 = x + s$, a ovo je isti izraz, koji i u Euklidovoj ravnini imamo za gibanje po osi X.

Infinitezimalna je transformacija od oblika

$$Uf \equiv \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (2)$$

jer je

$$\xi(x,y) = \left[\frac{dx_1}{ds}\right]_{s=0} = \frac{1}{\operatorname{ch} b},\quad \eta(x,y) = 0.$$

[4] Primjedbe str. 106.

Digitized by Google

Kako je po (1)

$$dx_1 = dx, \quad dy_1 = dy,$$

bit će

$$\frac{y_1'}{\operatorname{ch} y_1} = \frac{y'}{\operatorname{ch} y}.$$

Kod translacije po ekvidistantnoj liniji zatvora linearni element jednake kutove s ordinatama, koje mu odgovaraju. Zato i proširena transformacija ima isti infinitezimalni oblik (2). A mogli bismo također kazati: Kod ove se translacije ne mijenja kut među linearnim elementom i ekvidistantom, po kojoj se pomiče njegova tačka.

2. Translacija duž normale na os X. Pravac okomit na os X, koji na njoj odsijeca dužinu c, ima jednadžbu

$$x = c.$$

Po tome je

$$ds = dy, \quad s = y_1 - y.$$

Zato su jednadžbe

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \\ y_1 &= y + s, \end{aligned} \tag{3}$$

konačne jednadžbe ove transformacije. Kako je

$$\begin{aligned} x_2 &= x_1 = x, \\ y_2 &= y_1 + s_1 = y + (s + s_1), \end{aligned}$$

uviđamo, da ove translacije imadu svojstvo grupe.

Iz (3) izlazi

$$\left[\frac{dx_1}{ds}\right]_{s=0} = 0, \qquad \left[\frac{dy_1}{ds}\right]_{s=0} = 1,$$

pa je tako infinitezimalna transformacija

$$Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{4}$$

U Euklidovoj ravnini ovo je simbol translacije po paraleli s osju Y (Lie-Scheffers, o. c. pg. 51.), koja je ujedno i normala na osi X.

Digitized by Google

3. Invarijante. Tu imademo najprije jednostavno neizmjerne skupove trajektorija. Za (1) su to ekvidistante prema X, a za (3) su normale na X. Da su nam zadane samo infinitezimalne transformacije (2) i (4), odredili bismo te trajektorije iz uvjeta $U\omega = 0$. (2) i (4) dadu

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0.$$

Otuda se dobiva

$$\omega(y) = C, \quad \omega(x) = C'.$$

Najjednostavnije će biti, ako uzmemo

$y = C$, t. j. ekvidistante s medijanom X, i
$x = C'$, t. j. normale na X.

Zatijem možemo kazati:

Kod translacija po ekvidistantnim linijama sa medijanom X ostaju invarijantne normale na os X i obrnuto.

To se razbira, kad u (2) mjesto f supstituiramo $\omega \equiv x = C$. Izlazi $U\omega = \omega$.

4. Translacija po paraleli sa $+X$. Paralela s pozitivnom stranom osi X, koja na Y odsijeca dužinu b, predočena je jednadžbom

$$\cos \Pi(y) = e^{-x} \cos \Pi(b)$$

ili

$$e^x \operatorname{th} y = \operatorname{th} b. \tag{5}$$

Iz ove jednadžbe izvedimo

$$y' = -\operatorname{sh} y \operatorname{ch} y$$

i uvrstimo u $ds = dx\sqrt{\operatorname{ch}^2 y + y'^2}$. Tako ćemo dobiti

$$ds = \operatorname{ch}^2 y \, dx,$$

ili s pomoću (5)

$$ds = \frac{e^{2x} dx}{e^{2x} - \operatorname{th}^2 b}.$$

Uzmemo li $e^x = z$, naći ćemo odmah

Digitized by Google

$$s = \frac{1}{2} \log (e^{2x} - \text{th}^2 b) + \log C.$$

Tačka se u smjeru paralelnosti počinje kretati od osi Y, pa stoga konstantu valja odrediti iz uvjeta, da je $s = 0$ za $x = 0$, dakle iz jednadžbe

$$0 = \frac{1}{2} \log (1 - \text{th}^2 b) . C^2.$$

Vidi se, da treba uzeti $C = \text{ch}\, b$, pa je tako

$$s = \frac{1}{2} \log (e^{2x} - \text{th}^2 b) \, \text{ch}^2 b. \qquad (6)$$

Dalje je

$$e^{2s} + \text{sh}^2 b = e^{2x} \text{ch}^2 b.$$

a odatle lako izvodimo

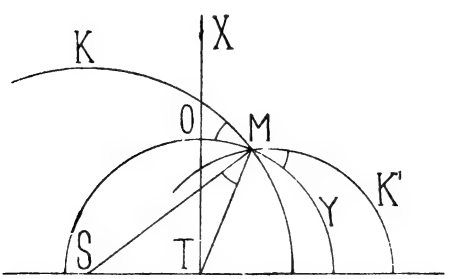
$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2s} - 1} = \frac{1}{\text{ch}^2 b}$$

ili

$$\frac{e^{2x} - 1}{e^{2s} - 1} = \sin^2 \Pi (b).$$

U ovom se obliku formula (6) nalazi u Engelovu izdanju Lobačevskoga na str. 32.

Lobačevski dobiva ovaj izraz specijaliziranjem formule za kosinus kuta paralelnosti, što odgovara luku s na pravcu, koji os Y siječe pod kutom A i na njoj odsijeca dužinu b. Taj je pravac na slici 2. predočen polukrugom K. Jednadžba mu je



Slika 2.

Digitized by Google

$$(x + TS)^2 + y^2 = SM^2,$$

a kako je

$$TS = \frac{\sin A}{\sin[\Pi(b) - A]}, \quad MS = \frac{\sin \Pi(b)}{\sin[\Pi(b) - A]},$$

možemo tu jednadžbu pisati

$$(x^2 + y^2)\sin[\Pi(b) - A] + 2x\sin A = \frac{\sin^2\Pi(b) - \sin^2 A}{\sin[\Pi(b) - A]}.$$

Vrijednost količnika na desnoj strani ove jednadžbe jednaka je $\sin[A + \Pi(b)]$; zato možemo pisati

$$2x \sin A = (x^2 + y^2)\sin[A - \Pi(b)] + \sin[A + \Pi(b)].$$

Kad se prijeđe na pravokutne koordinate Lobačevskoga, imamo

$$2\cos\Pi(y)\sin A = e^x \sin[A - \Pi(b)] + e^{-x} \sin[A + \Pi(b)].$$

Ovo se posve podudara s izrazom (25) u Lobačevskoga na str. 27. Jednadžba (10) u Primjedbama na str. 92. odgovara pravcu K'.

Sad nam valja izraziti s kao funkciju od y. U izraz

$$ds = dy\sqrt{x'^2 \mathrm{ch}^2 y + 1}$$

uvrstit ćemo

$$x' = -\frac{1}{\mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y},$$

pak će biti

$$ds = -\coth y.$$

Znak minus uzeli smo zato, što y pada, kad s raste. Odavle je

$$s = -\log \mathrm{sh}\, y + \log C.$$

Za $y = b$ mora biti $s = 0$, jer luk računamo od osi Y, dakle je $C = \mathrm{sh}\, b$, i tako je

$$s = \log \frac{\mathrm{sh}\, b}{\mathrm{sh}\, y}. \qquad (7)$$

Isti bismo izraz dobili eliminirajući x iz (5) i (6).

Digitized by Google

No ako luk ne računamo od osi Y, već po paraleli (5) idemo od tačke $M(x,y)$ do $M_1(x_1,y_1)$, onda nam (6) i (7) daju

$$s = \frac{1}{2}\log\frac{e^{2x_1}-\operatorname{th}^2 b}{e^{2x}-\operatorname{th}^2 b} \text{ i } s = \log\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} y_1}.$$

Konačne jednadžbe za translaciju po paraleli (5) mogu se napokon pisati u obliku

$$\begin{aligned} e^{2x_1}-\operatorname{th}^2 b &= e^{2s}(e^{2x}-\operatorname{th}^2 b),\\ \operatorname{sh} y_1 &= e^{-s}\operatorname{sh} y. \end{aligned} \tag{8}$$

Za pomak s_1 od M_1 do M_2 imamo na isti način

$$e^{2x_2}-\operatorname{th}^2 b = e^{2s_1}(e^{2x_1}-\operatorname{th}^2 b) = e^{2(s+s_1)}(e^{2x_1}-\operatorname{th}^2 b),$$
$$\operatorname{sh} y_2 = e^{-s_1}\operatorname{sh} y_1 = e^{-(s+s_1)}\operatorname{sh} y.$$

Ovo nam kazuje, da ove translacije imadu svojstvo grupe. Malo prije smo našli izraze za diferencijal luka na paraleli sa $+X$, iz kojih izlazi

$$\frac{dx}{ds} = 1-e^{-2x}\operatorname{th}^2 b, \quad \frac{dy}{ds} = -\operatorname{th} y,$$

i tako je simbol infinitezimalne translacije po paraleli sa $+X$

$$Uf \equiv (1-e^{-2x}\operatorname{th}^2 b)\frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{th} y\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{9}$$

Za translaciju po paraleli sa $-X$, kojoj je jednadžba

$$\operatorname{th} y = e^{x}\operatorname{th} b,$$

dobivamo refleksijom na Y posve analogne izraze. Područje, u kom vrijede ovi izrazi za translacije duž paralela s osju X, ograničeno je sa četiri zajedničke paralele koordinatnih osi X i Y. U izrazima za te translacije dolazi b t. j. odrezak na Y. Izvan spomenutoga područja leže one paralele s osju X, koje više ne presijecaju Y.

5. Translacije po graničnome krugu, komu su osi paralelne sa $+X$.

Digitized by Google

Jednadžba graničnoga kruga, koji na osi $+X$ odsijeca dužinu b, jest

$$e^x = e^b \operatorname{ch} y. \tag{10}$$

Iz nje je

$$y' = \frac{e^x}{e^b \operatorname{sh} y} = \frac{e^{x-b}}{\sqrt{e^{2(x-b)}-1}},$$

dakle

$$ds = \frac{e^{2(x-b)}\,dx}{\sqrt{e^{2(x-b)}-1}}.$$

Prema tome je

$$s = \sqrt{e^{2(x-b)}-1}. \tag{11}$$

Konstanta integracije ima vrijednost $C=0$, jer za $x=b$ treba da je $s=0$. Za $b=0$ imamo izraz, koji mu odgovara, u Lobačevskoga.[5]

Poznat je dalje izraz

$$s = \operatorname{sh} y.$$

Ako se tačka giba po graničnome krugu od M do M_1, imamo

$$\begin{aligned} \sqrt{e^{2(x_1-b)}-1} &= s + \sqrt{e^{2(x-b)}-1}, \\ \operatorname{sh} y_1 &= s + \operatorname{sh} y \end{aligned} \tag{12}$$

kao konačne jednadžbe ove transformacije. Svojstvo grupe razbira se iz formula

$$\begin{aligned} \sqrt{e^{2(x_2-b)}-1} &= s_1 + \sqrt{e^{2(x_1-b)}-1} = (s+s_1) + \sqrt{e^{2(x-b)}-1}, \\ \operatorname{sh} y_2 &= s_1 + \operatorname{sh} y_1 = (s+s_1) + \operatorname{sh} y. \end{aligned}$$

Infinitezimalni je simbol ove transformacije

$$Uf \equiv \frac{\sqrt{e^{2(x-b)}-1}}{e^{2(x-b)}} \frac{\partial f}{x} + \frac{1}{\operatorname{ch} y} \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{13}$$

[5] N. J. Lobatschefskij: Pangeometrie. Ostwald's Klassiker No. 130., pg. 43. Prijevod H. Liebmanna.

Digitized by Google

Za druge granične krugove, kojima su osi paralelne s negativnom stranom apscisne osi, dobit ćemo refleksijom na ordinatnoj osi posve analogne izraze.

6. Invarijante za (8) i (13). Tu imademo najprije trajektorije tačke, kojoj je kretanje određeno sa

$$Uf \equiv (1-e^{-2x}\text{th}^2 b)\frac{\partial f}{\partial x} - \text{th}\, y \frac{\partial f}{\partial y}.$$

Trajektoriju $\omega(x,y) = C$ određuje jednadžba

$$(1-e^{-2x}\text{th}^2 b)\frac{\partial \omega}{\partial x} - \text{th}\, y \frac{\partial \omega}{\partial y} = 0$$

ili

$$\frac{dx}{1-e^{-2x}\text{th}^2 b} = -\frac{dy}{\text{th}\, y}.$$

Kad to napišemo u obliku

$$\frac{e^{2x}}{\text{th}^2 b}\, dx : \left(\frac{e^{2x}}{\text{th}^2 b} - 1\right) = -\frac{dy \text{ch} y}{\text{sh} y},$$

dobivamo integracijom iza nekoliko transformacija

$$e^x \text{th}\, y = \text{th}\, b,$$

a to je rezultat, koji se razumije sam od sebe. No pokazat ćemo, da kod translacije po paralelama sa $+X$ ostaje invarijantan i jednostavno neizmjerni skup graničnih krugova, kojima se os podudara s osju $+X$ i koji konkavnu svoju stranu okreću prema $+X$.[6] Jednadžba je tih krugova

$$\omega(x, y) \equiv \frac{e^x}{\text{ch}\, y} = e^b,$$

stoga je

$$U\omega \equiv (1 - e^{-2x}\text{th}^2 b)\frac{e^x}{\text{ch}\, y} + \text{th}^2 y \frac{e^x}{\text{ch}\, y}$$

ili

$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\text{ch}\, y}(1-e^{-2x}\text{th}^2 b + \text{th}^2 y).$$

[6] H. Liebmann, Nichteuklidische Geometrie, pg. 43. I on ove translacije proučava s pomoću projektivne transformacije.

Digitized by Google

Poradi jednadžbe paralele

$$\operatorname{th} y = e^{-x} \operatorname{th} b$$

reducira se ovo na

$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} \text{ t. j. } U\omega \equiv \omega.$$

Analogno za paralele sa $-X$.

Tako bismo isto našli, da su trajektorije za tačke, koje se gibaju pod utjecajem infinitezimalne transformacije (13), granični krugovi (10). Kod te transformacije ostaje na drugi način invarijantan i jednostavno neizmjerni sistem paralela sa $+X$.

Ako u (13) mjesto f uvrstimo

$$\omega(x, y) \equiv e^x \operatorname{th} y - \operatorname{th} b = 0,$$

imat ćemo

$$U\omega \equiv \frac{\sqrt{e^{2(x-b)} - 1}}{e^{2(x-b)}} \frac{\partial e^x \operatorname{th} y}{\partial x} + \frac{1}{\operatorname{ch} y} \frac{\partial e^x \operatorname{th} y}{\partial y}$$

t. j.

$$U\omega \equiv \frac{\sqrt{e^{2(x-b)} - 1}}{e^{2(x-b)}} \cdot e^x \operatorname{th} y + \frac{e^x}{\operatorname{ch}^3 y}.$$

Na osnovi jednadžbe graničnoga kruga (10) imamo

$$e^x = e^b \operatorname{ch} y, \quad \frac{\sqrt{e^{2(x-b)} - 1}}{e^{2(x-b)}} = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch}^2 y},$$

pa je tako

$$U\omega \equiv e^b,$$

t. j. konstanta. No i konstantu možemo držati funkcijom samoga ω; dakle je $U\omega$ doista funkcija od ω.

7. Translacije po normali na os Y. Pravac okomit na os Y, koji na njoj odsijeca dužinu b, ima jednadžbu

$$\cos \Pi(y) \sin \Pi(x) = \cos \Pi(b)$$

ili

$$\operatorname{th} y = \operatorname{ch} x \operatorname{th} b. \tag{14}$$

Digitized by Google

Iz nje je

$$y' = \mathrm{ch}^2 y \,\mathrm{sh}\, x \,\mathrm{th}\, b,$$

pa je zato

$$ds = dx\sqrt{\mathrm{ch}^2 y\,(1+\mathrm{ch}^2 y\,\mathrm{sh}^2 x\,\mathrm{th}^2 b)}\,.$$

No sad je

$$\mathrm{ch}^2 y = \frac{1}{1-\mathrm{th}^2 y},\ \text{a po (14)}\ \mathrm{ch}^2 y = \frac{1}{1-\mathrm{ch}^2 x \mathrm{th}^2 b},$$

dakle

$$ds = \frac{dx}{1-\mathrm{ch}^2 x \mathrm{th}^2 b}\,.\,\sqrt{1-\mathrm{th}^2 b}\,,$$

konačno

$$s = \frac{1}{\mathrm{ch}\, b}\int_0^x \frac{dx}{1-\mathrm{ch}^2 x \mathrm{th}^2 b}\,.$$

Supstitucijom

$$\mathrm{th}\, x = t,$$

$$\mathrm{ch}^2 x = \frac{1}{1-t^2},$$

$$dx = \frac{dt}{1-t^2}$$

prelazi to u

$$s = \frac{1}{\mathrm{ch}\, b}\int_0^t \frac{dt}{(1-t^2)-\mathrm{th}^2 b} = \frac{1}{\mathrm{ch}\, b}\int_0^t \frac{dt}{\mathrm{sech}^2 b - t^2}\,.$$

Tako je

$$s\,\mathrm{ch}\, b = \log \sqrt{\frac{\mathrm{sech}\, b + \mathrm{th}\, x}{\mathrm{sech}\, b - \mathrm{th}\, x}}\,. \qquad (15)$$

Konstanta integracije jednaka je nuli, jer za $x = 0$ ima biti $s = 0$. No mogli bismo također pisati

$$s = \int_0^t \frac{dt\,\mathrm{ch}\, b}{1 - t^2 \mathrm{ch}^2 b} = \mathrm{arc\,th}\, t\,\mathrm{ch}\, b\,,$$

a to daje

$$\mathrm{th}\, s = \mathrm{th}\, x\,\mathrm{ch}\, b\,. \qquad (16)$$

Digitized by Google

Konstanta integracije jednaka je nuli; uz $x=0$ mora biti $s=0$.

Na 32. str. Engelova izdanja Lobačevskoga dolazi izraz

$$\cos F(s) = \frac{\cos F(x)}{\sin A \,.\, \sin F(l) + \cos A \,.\, \cos F(l) \,.\, \cos F(x)},$$

a taj se za $A = 90^0$ reducira na prethodnu formulu (16).

Iz (16) i (14) mogli bismo eliminirati x, pak bismo dobili s izraženo s pomoću y, no kako nam zaradi simbola infinitezimalne transformacije treba $\frac{dx}{ds}$ i $\frac{dy}{ds}$, moramo i ovdje drukčije raditi. Ako u

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{dx}{1 - \operatorname{ch}^2 x \operatorname{th}^2 b}$$

uvrstimo

$$dx = \frac{dy}{\operatorname{ch}^2 y \operatorname{sh} x \operatorname{th} b}, \quad \operatorname{ch}^2 x \operatorname{th}^2 b = \operatorname{th}^2 y,$$

bit će

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{dy}{\operatorname{th} b \operatorname{sh} x}.$$

Iz (14) izlazi

$$\operatorname{sh} x = \frac{1}{\operatorname{th} b} \sqrt{\operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 b},$$

a to uvršteno u prethodni izraz daje

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{dy}{\sqrt{\operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 b}}.$$

Supstitucijom $\operatorname{th} y = t$ prelazi to u

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{dt}{(1-t^2)\sqrt{t^2 - \operatorname{th}^2 b}}.$$

Ako uzmemo ovdje

$$t = \operatorname{th} b \sec \varphi,$$

bit će

$$\sqrt{t^2 - \operatorname{th}^2 b} = \operatorname{th} b \operatorname{tg} \varphi,$$

Digitized by Google

i tako je

$$ds = \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\cos^2\varphi - \operatorname{th}^2 b} = \frac{1}{\operatorname{ch} b} \cdot \frac{\cos\varphi\, d\varphi}{(1-\operatorname{th}^2 b) - \sin^2\varphi}$$

ili

$$ds = \frac{\operatorname{ch} b \cos\varphi\, d\varphi}{1 - \operatorname{ch}^2 b \sin^2\varphi}.$$

Odavle je

$$s = \operatorname{arc\,th}(\operatorname{ch} b \sin\varphi)$$

ili

$$\operatorname{th} s = \operatorname{ch} b \sin\varphi.$$

Poradi gornjih je supstitucija

$$\operatorname{th} y = \operatorname{th} b \sec\varphi,$$

dakle

$$\sin\varphi = \frac{\sqrt{(\operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 b}}{\operatorname{th} y},$$

stoga je napokon

$$\operatorname{th} s = \frac{\operatorname{ch} b \sqrt{\operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 b}}{\operatorname{th} y}. \qquad (17)$$

I ovdje je konstanta integracije jednaka nuli, jer za $y = b$ mora biti $s = 0$.

Infinitezimalna je translacija po normali na os Y

$$Uf \equiv \operatorname{ch} b(1 - \operatorname{ch}^2 x \operatorname{th}^2 b)\frac{\partial f}{\partial x} + \operatorname{ch} b \sqrt{\operatorname{th}^2 y - \operatorname{th}^2 b}\,\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (18)$$

Za $b = 0$ prelazi normala na Y u os X, a za nju je i $y = 0$, pa se (18) reducira na

$$Uf \equiv \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Uz isti uvjet reducira se na to i (9).

Konačne jednadžbe ove translacije pisat ćemo ovako:

Digitized by Google

$$2s\,\mathrm{ch}\,b = \log\frac{1+\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x},$$
$$2s\,\mathrm{ch}\,b = \log\frac{\mathrm{th}\,y+\mathrm{ch}\,b\sqrt{\mathrm{th}^2y-\mathrm{th}^2b}}{\mathrm{th}\,y-\mathrm{ch}\,b\sqrt{\mathrm{th}^2y-\mathrm{th}^2b}}. \qquad (19).$$

Idemo li po normali od M do M_1, imat ćemo za taj luk s

$$2s\,\mathrm{ch}\,b = \log\frac{1+\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x_1}{1-\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x_1} - \log\frac{1+\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x}.$$

Isto takav izraz možemo napisati za luk s_1, kad idemo od M_1 do M_2; zbrojivši imamo

$$2(s+s_1)\,\mathrm{ch}\,b = \log\frac{1+\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x_2}{1-\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x_2} - \log\frac{1+\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x}{1-\mathrm{ch}\,b\,\mathrm{th}\,x},$$

a time je pokazano svojstvo grupe.

8. Translacije po ekvidistantnoj liniji sa medijanom Y. Jednadžba je te ekvidistantne linije[7]

$$\mathrm{sh}\,x\,\mathrm{ch}\,y = \mathrm{sh}\,p. \qquad (20)$$

Iz nje je

$$\frac{dy}{dx} = -\coth x\coth y = -\coth y\,.\,\frac{\sqrt{\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2p}}{\mathrm{sh}\,p},$$

zato ćemo dobiti

$$ds = \frac{dy\,\mathrm{ch}\,y\,\mathrm{ch}\,p}{\sqrt{\mathrm{ch}^2y+\mathrm{sh}^2p}} = \frac{dy\,\mathrm{ch}\,y\,\mathrm{ch}\,p}{\sqrt{\mathrm{sh}^2y+\mathrm{ch}^2p}}.$$

Tako je

$$s = \int_0^y \frac{dy\,\mathrm{ch}\,y}{\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{sh}\,p}\right)^2}},$$

[7] Primjedbe str. 106. Lobačevski spominje ekvidistantnu liniju samo na jednom mjestu (Engel str. 265.). Jednadžbe tih linija nijesam ni drugdje nigdje našao. Liebmann na str. 136. spomenutoga djela izvodi rektifikaciju ekvidistante prema osi X na osnovi trigonometrijskih relacija.

Digitized by Google

dakle

$$s = \operatorname{ch} p \operatorname{arc\,sh} \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{ch} p}. \tag{21}$$

Za $y = 0$ mora biti $s = 0$, zato je konstanta integracije nula. Uzmemo li $p = 0$, izlazi $s = y$, kako i treba za translaciju po osi Y.

Sada nam još valja s izraziti s pomoću x. Na osnovi jednadžbe (20) možemo pisati

$$\frac{dy}{dx} = -\operatorname{coth} x . \frac{\operatorname{sh} p}{\sqrt{\operatorname{sh}^2 p - \operatorname{sh}^2 x}},$$

$$\operatorname{ch}^2 y + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = \frac{\operatorname{sh}^2 p}{\operatorname{sh}^2 x} \cdot \frac{\operatorname{ch}^2 p}{\operatorname{sh}^2 p - \operatorname{sh}^2 x},$$

i tako je

$$ds = -\frac{dx \operatorname{sh} p \operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} x \sqrt{\operatorname{sh}^2 p - \operatorname{sh}^2 x}}. \tag{22}$$

Da se integracija olakša, transformirat ćemo (22) ovako

$$-\frac{ds}{\operatorname{ch} p} = \frac{dx \operatorname{sh} p \sqrt{\operatorname{coth}^2 p - 1}\ \sqrt{\operatorname{coth}^2 x - 1}}{\operatorname{sh} x \sqrt{\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{coth}^2 p}}$$

$$= \frac{dx}{\operatorname{sh}^2 x \sqrt{\operatorname{coth}^2 x - \operatorname{coth}^2 p}}.$$

Napokon je

$$\frac{ds}{\operatorname{ch} p} = \frac{d\left(\frac{\operatorname{coth} x}{\operatorname{coth} p}\right)}{\sqrt{\left(\frac{\operatorname{coth} x}{\operatorname{coth} p}\right)^2 - 1}},$$

a odatle

$$\frac{s}{\operatorname{ch} p} = \operatorname{arc\,ch} \frac{\operatorname{coth} x}{\operatorname{coth} p}. \tag{23}$$

Integrira se od presjeka ove ekvidistantne linije s osju X; stoga za $x = p$ mora biti $s = 0$, zato je $C = 0$. Ovaj se izraz lako može transformirati u

$$\frac{s}{\operatorname{ch} p} = \operatorname{arc\,sh} \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 p - \operatorname{sh}^2 x}}{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} p}. \tag{24}$$

Digitized by Google

Ako po ekvidistanti idemo od M do M_1, onda nam (21) i (24) daju

$$\text{arc sh}\,\frac{\text{sh}\,y_1}{\text{ch}\,p} = \frac{s}{\text{ch}\,p} + \text{arc sh}\,\frac{\text{sh}\,y}{\text{ch}\,p},$$
$$\text{arc sh}\,\frac{\sqrt{\text{sh}^2 p - \text{sh}^2 x_1}}{\text{sh}\,x_1\,\text{ch}\,p} = \frac{s}{\text{ch}\,p} + \text{arc sh}\,\frac{\sqrt{\text{sh}^2 p - \text{sh}^2 x}}{\text{sh}\,x\,\text{ch}\,p}, \tag{25}$$

a ovo su konačne jednadžbe ove translacije. Iz tih direktno razbiramo, da te translacije imadu svojstvo grupe.

Infinitezimalna je transformacija

$$Uf \equiv -\frac{\text{sh}\,x\,\sqrt{\text{sh}^2 p - \text{sh}^2 x}}{\text{sh}\,p\,\text{ch}\,p}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{\text{sh}^2 y + \text{ch}^2 p}}{\text{ch}\,y\,\text{ch}\,p}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{26}$$

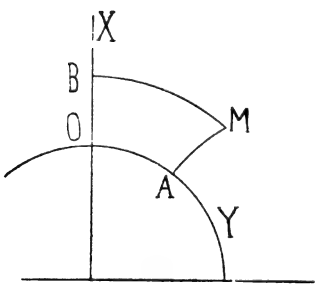
9. Jednadžbe nekih linija u Weierstrassovim koordinatama. Ekvidistanta s medijanom X ima jednadžbu

$$y = p,$$

a s medijanom Y

$$\text{sh}\,x\,\text{ch}\,y = \text{sh}\,p. \tag{20}$$

Koordinate Lobačevskoga x, y nijesu simetrično određene s obzirom na koordinatne osi, stoga ni ove dvije ekvidistante nemaju analogne jednadžbe. Analogija je potpuna, kad uzmemo Weierstrassove[8] koordinate ξ, η, koje su određene kao dužine normala spuštenih iz tačke M na koordinatne osi.



Slika 3.

Koordinate su Lobačevskoga

$$OB = x, \quad MB = y,$$

a Weierstrassove

$$MA = \xi, \quad MB = \eta.$$

Geodetski četverokut $AOBM$ ima tri prava kuta.

---

[8] F. Dannmeyer: Die Oberflächen- und Volumenberechnung für den Lobatschefskij'schen Raum. Göttingen 1904.
Vidi također Liebmanna, pg. 167.

Digitized by Google

S pomoću formula, koje postoje za takav četverokut i koje su prikupljene u Engelovu izdanju Lobačevskoga na str. 347., možemo odmah pisati

$$\sin \Pi(y) = \operatorname{cotg} \Pi(x) \operatorname{tg} \Pi(\xi)$$

ili

$$\operatorname{sh} \xi = \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y. \tag{27}$$

Kad ovo isporedimo s (20), vidimo, da su

$$\xi = p, \quad \eta = p \tag{28}$$

jednadžbe ovih dviju ekvidistanta u Weierstrassovim koordinatama.

Tako je isto i s normalama. Normala na os X ima jednadžbu

$$\operatorname{th} y = \operatorname{ch} x \operatorname{th} b, \tag{14}$$

dok je

$$x = b$$

normala na Y. U spomenutom je četverokutu

$$\sin \Pi(\eta) = \operatorname{cotg} \Pi(OB) \operatorname{tg} \Pi(\xi);$$

označivši OB sa b možemo to također pisati

$$\operatorname{sh} \xi = \operatorname{sh} b \operatorname{ch} \eta, \tag{29}$$

a to je u Weierstrassovim koordinatama jednadžba normale, koja na apscisnoj osi odsijeca dužinu b. Ako pak uzmemo normalu na ordinatnu os, onda imamo

$$\sin \Pi(\xi) = \operatorname{tg} \Pi(\eta) \operatorname{cotg} \Pi(OA)$$

ili

$$\operatorname{sh} \eta = \operatorname{sh} b \operatorname{ch} \xi, \tag{30}$$

gdje je $b = OA$.

Kao treću vrstu koordinatâ mogli bismo uzeti oba odreska na osima, naime

$$u = OB, \quad v = OA.$$

Onda je

$$u = x,$$

dok je

$$\cos \Pi(OA) = \cos \Pi(y) \sin \Pi(x)$$

ili

$$\operatorname{th} v = \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x}. \tag{31}$$

Digitized by Google

Normale na koordinatne osi imadu jednadžbe

$$u = b, \quad v = b'.$$

Ekvidistanta prema osi X, naime $y = p$, može se na osnovi (31) pisati

$$\operatorname{th} p = \operatorname{th} v \operatorname{ch} u. \tag{32}$$

Ekvidistanta prema osi Y, kojoj je jednadžba u koordinatama Lobačevskoga

$$\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y = \operatorname{sh} p, \tag{20}$$

daje

$$\operatorname{th} p = \frac{\operatorname{sh} x \operatorname{ch} y}{\sqrt{1+\operatorname{sh}^2 x \operatorname{ch}^2 y}}. \tag{32}$$

Po (31) imamo

$$\operatorname{th} y = \operatorname{ch} u \operatorname{th} v,$$

stoga je

$$\operatorname{ch} y = \frac{1}{\sqrt{1-\operatorname{ch}^2 u \operatorname{th}^2 v}}.$$

Ako ovo i $x = u$ unesemo u (32), dobit ćemo

$$\operatorname{th} p = \operatorname{th} u \operatorname{ch} v. \tag{33}$$

Među ovim novim koordinatama i među Weierstrassovim postoje snošaji

$$\operatorname{sh} u = \frac{\operatorname{sh} \xi}{\operatorname{ch} \eta}, \quad \operatorname{sh} v = \frac{\operatorname{sh} \eta}{\operatorname{ch} \xi} \tag{34}$$

i

$$\operatorname{th} \eta = \operatorname{ch} u \operatorname{th} v, \quad \operatorname{th} \xi = \operatorname{th} u \operatorname{ch} v. \tag{35}$$

Sve se to lako uviđa iz onoga četverokuta sa tri prava kuta.

Iz simetrije jednadžbi normalâ i ekvidistantâ razbiramo na osnovi članka 3., da kod translacija po ekvidistantnoj liniji, kojoj je medijana jedna os, ostaju invarijantne normale na drugu os i obrnuto.

Uzet ćemo još jednadžbe paralelâ s osima koordinatnima i granične krugove. Paralela sa $+X$ ima jednadžbu

$$e^x \operatorname{th} y = \operatorname{th} b. \tag{5}$$

Digitized by Google

No sad je

$$e^x = \operatorname{cotg} \frac{\Pi(x)}{2} = \frac{\sqrt{1+\operatorname{th} x}}{\sqrt{1-\operatorname{th} x}}, \qquad (36)$$

a po (27) je

$$\operatorname{sh} x = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\operatorname{ch}\eta}, \quad \operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh}\xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi}}.$$

Uslijed prijelaza na Weierstrassove koordinate dobit ćemo iz (5)

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi} + \operatorname{sh}\xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi} - \operatorname{sh}\xi} = \frac{\operatorname{th}^2 b}{\operatorname{th}^2 y}.$$

Učinivši, da je brojnik racionalan, dobivamo za paralelu sa $+X$ jednadžbu

$$\operatorname{sh}\eta - \operatorname{th} b \sqrt{\operatorname{ch}^2\xi + \operatorname{sh}^2\eta} + \operatorname{th} b \operatorname{sh}\xi = 0. \qquad (37)$$

U Primjedbama na str. 92. imamo jednadžbu pravca, koji u udaljenosti b od početka koordinatnoga sistema presijeca os X pod kutom A. To je

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} \Pi(x—b) \cos \Pi(y).$$

Za paralelu s pozitivnom stranom osi Y treba uzeti

$$A = 180^0 - \Pi(b),$$

pak ćemo iz prethodne jednadžbe dobiti

$$\cos \Pi(x) - \cos \Pi(b) + \sin \Pi(x) \cos \Pi(y) \cos \Pi(b) = 0$$

ili

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{th} b \operatorname{ch} x + \operatorname{th} b \operatorname{th} y = 0. \qquad (38)$$

Kad prijeđemo na Weierstrassove koordinate, izlazi

$$\operatorname{sh}\xi - \operatorname{th} b \sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi} + \operatorname{th} b \operatorname{sh}\eta = 0, \qquad (39)$$

a ovo je posve analogno građeno kao (37).

Granični krug, komu su osi paralelne sa $+X$ i koji na apscisnoj osi odsijeca dužinu b, naime

Digitized by Google

$$e^x = e^b \operatorname{ch} y, \tag{10}$$

može se s obzirom na (36) u Weierstrassovim koordinatama predočiti sa

$$\frac{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi + \operatorname{sh}^2\eta} + \operatorname{sh}\xi}{\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi + \operatorname{sh}^2\eta} - \operatorname{sh}\xi} = e^{2b}\operatorname{ch}^2\eta.$$

Iza nekoliko transformacija može se to pisati

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\xi + \operatorname{sh}^2\eta} - \operatorname{sh}\xi - e^{-b} = 0. \tag{40}$$

Granični krug, komu su osi paralelne s pozitivnom stranom ordinatne osi i koji na toj osi odsijeca dužinu b, predočen je u onoj interpretaciji geometrije Lobačevskoga, koju smo prikazali u Primjedbama (vidi sl. 1.), krugom središta $\left(1, \operatorname{tg}\frac{\Pi(b)}{2}\right)$ i polumjera $\operatorname{tg}\frac{\Pi(b)}{2}$. Jednadžba mu je

$$x^2 + y^2 + 1 - 2x - 2y \operatorname{tg}\frac{\Pi(b)}{2} = 0$$

u običnim pravokutnim koordinatama, a u koordinatama Lobačevskoga

$$\operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{sh} y - e^{-b} = 0, \tag{41}$$

a to sa (10) ne pokazuje mnogo sličnosti. No ako prijeđemo na Weierstrassove koordinate, onda je

$$\sqrt{\operatorname{ch}^2\eta + \operatorname{sh}^2\xi} - \operatorname{sh}\eta - e^{-b} = 0 \tag{42}$$

posve analogno sa (40).

Iz analogije jednadžbi paralelâ sa $+X$ i sa $+Y$ i graničnih krugova, koji im odgovaraju, razbiramo, da će kod translacija po paralelama sa $+Y$ ostajati invarijantan skup graničnih krugova, komu su te paralele osi.

10. Translacije po pravcu, koji s osju X zatvora kut α i prolazi kroz početak koordinatnog sistema. Jednadžba mu je

$$\operatorname{th} y = \operatorname{tg}\alpha \operatorname{sh} x. \tag{43}$$

Digitized by Google

Na osnovi izraza za diferencijal luka ovakovoga pravca, koji se nalaze u Primjedbama na str. 94. i 95., možemo odmah napisati infinitezimalnu translaciju.

$$Uf \equiv \cos\alpha\,(1-\mathrm{tg}^2\alpha\,\mathrm{sh}^2 x)\,\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\sqrt{\sin^2\alpha + \mathrm{sh}^2 y}}{\mathrm{ch}\,y}\,\frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (44)$$

Za luk smo tamo našli

$$s = \mathrm{arc\,th}\,\frac{\mathrm{th}\,x}{\cos\alpha},\quad s = \mathrm{arc\,sh}\,\frac{\mathrm{sh}\,y}{\sin\alpha}.$$

Konačne su jednadžbe ove transformacije

$$\mathrm{arc\,th}\,\frac{\mathrm{th}\,x_1}{\cos\alpha} = s + \mathrm{arc\,th}\,\frac{\mathrm{th}\,x}{\cos\alpha},$$
$$\mathrm{arc\,sh}\,\frac{\mathrm{sh}\,y_1}{\sin\alpha} = s + \mathrm{arc\,sh}\,\frac{\mathrm{sh}\,y}{\sin\alpha},$$

iz kojih se odmah razabira, da joj pripada svojstvo grupe.

11. Rotacija oko početka koordinatnoga sistema. Krug sa središtem u početku koordinatnoga sistema i s polumjerom p ima jednadžbu

$$\mathrm{ch}\,x\,\mathrm{ch}\,y = \mathrm{ch}\,p. \qquad (45)$$

Iz nje je

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\mathrm{th}\,x}{\mathrm{th}\,y},$$

stoga je

$$ds = -dy\sqrt{\frac{\mathrm{sh}^2 y}{\mathrm{th}^2 x} + 1}.$$

Znak je minus stoga, što y pada, kad luk raste. Ako iz jednadžbe kruga unesemo ovamo vrijednost za $\mathrm{th}\,x$, bit će

$$ds = -\frac{\mathrm{sh}\,p\,\mathrm{ch}\,y\,dy}{\sqrt{\mathrm{ch}^2 p - \mathrm{ch}^2 y}} = -\frac{\mathrm{sh}\,p\,\mathrm{ch}\,y\,dy}{\sqrt{\mathrm{sh}^2 p - \mathrm{sh}^2 y}},$$

ili

$$\frac{ds}{\mathrm{sh}\,p} = -\frac{d\left(\frac{\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{sh}\,p}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{\mathrm{sh}\,y}{\mathrm{sh}\,p}\right)^2}},$$

Digitized by Google

dakle

$$\frac{s}{\operatorname{sh} p} = -\arcsin\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} p} + C.$$

Luk računamo od tačke na pozitivnoj strani osi Y prema pozitivnoj osi X. Konstanta ima vrijednost $C = \frac{\pi}{2}$, jer za $y = p$ mora biti $s = 0$.

Tako je

$$s = \frac{\pi}{2}\operatorname{sh} p - \operatorname{sh} p \arcsin\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} p}. \qquad (46)$$

Za $y = 0$ imamo kvadrant kruga u ravnini Lobačevskoga

$$s = \frac{\pi}{2}\operatorname{sh} p.$$

Luk ćemo izraziti sada apscisom. Dobit ćemo

$$ds = \frac{\operatorname{ch} p \operatorname{sh} p\, dx}{\operatorname{ch} x \sqrt{\operatorname{ch}^2 p - \operatorname{ch}^2 x}}.$$

Hiperbolne kosinuse pod znakom korijena izrazimo tangensima, pa će biti

$$ds = \frac{\operatorname{sh} p\, dx}{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{\operatorname{th}^2 p - \operatorname{th}^2 x}},$$

a to daje

$$s = \operatorname{sh} p \arcsin\frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} p}. \qquad (47)$$

Ovaj izraz nalazimo u Engela na str. 32., samo što tamo dolaze cirkularne funkcije kutova paralelnosti.

U ovim izrazima za luk računali smo s od tačke $B(o, p)$ na $+Y$ prema $+X$ do tačke $M(x, y)$. Centrični kut, koji pripada ovome luku s, neka je σ; A neka je nožište normale spuštene iz M na OX. Kut, koji je u trokutu AOM nasuprot strani AM, jest $\frac{\pi}{2} - \sigma$.

Digitized by Google

Ako sada

$$\frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} p} = \cos\sigma, \quad \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} p} = \sin\sigma$$

uvrstimo u (46) ili (47), dobit ćemo[9]

$$s = \sigma \operatorname{sh} p. \tag{48}$$

Konačne jednadžbe rotacije jesu

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} p \operatorname{arc\,sin} \frac{\operatorname{th} x_1}{\operatorname{th} p} &= s + \operatorname{sh} p \operatorname{arc\,sin} \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} p}, \\ \operatorname{sh} p \operatorname{arc\,sin} \frac{\operatorname{sh} y_1}{\operatorname{sh} p} &= -s + \operatorname{sh} p \operatorname{arc\,sin} \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} p}, \end{aligned} \tag{49}$$

a infinitezimalna je rotacija

$$Uf \equiv \frac{\operatorname{ch}^2 x \sqrt{\operatorname{th}^2 p - \operatorname{th}^2 x}}{\operatorname{sh} p} \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\sqrt{\operatorname{sh}^2 p - \operatorname{sh}^2 y}}{\operatorname{sh} p \operatorname{ch} y} \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{50}$$

Konačne jednadžbe rotacije mogli bismo i drukčije prikazati. Neka tačka počinje svoje gibanje na osi $+X$ i neka dođe na krugu polumjera p u položaj M. Centrični kut, koji tomu odgovara, neka je ω. Iz M spustimo normalu MA na os X. Iz pravokutnoga trokuta AOM imamo

$$\operatorname{th} x = \operatorname{th} p \cos\omega, \quad \operatorname{sh} y = \operatorname{sh} p \sin\omega. \tag{51}$$

Zakrenemo li OM još za kut α, doći ćemo do M_1, pa je

$$\operatorname{th} x_1 = \operatorname{th} p \cos(\omega + \alpha), \quad \operatorname{sh} y_1 = \operatorname{sh} p \sin(\omega + \alpha).$$

S pomoću jednadžbi (51) i s pomoću relacije

$$\operatorname{ch} p = \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y$$

možemo prethodne jednadžbe predočiti u obliku

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x_1 &= \operatorname{th} x \cos\alpha - \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x} \sin\alpha, \\ \operatorname{sh} y_1 &= \operatorname{sh} y \cos\alpha + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \sin\alpha. \end{aligned} \tag{52}$$

[9] Engel-Lobatschevskij str. 29.

Digitized by Google

Ako ovdje centrični kut α izrazimo lukom s i polumjerom p, imat ćemo

$$\begin{aligned} \operatorname{th} x_1 &= \operatorname{th} x \cos \frac{s}{\operatorname{sh} p} - \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{ch} x} \sin \frac{s}{\operatorname{sh} p}, \\ \operatorname{sh} y_1 &= \operatorname{sh} y \cos \frac{s}{\operatorname{sh} p} + \operatorname{sh} x \operatorname{ch} y \sin \frac{s}{\operatorname{sh} p}. \end{aligned} \tag{53}$$

Valja samo držati na umu, da je ovdje rotacija protivnoga smisla negoli u (49). Odavle je

$$\begin{aligned} \left[\frac{dx_1}{ds}\right]_{s=0} &= -\frac{\operatorname{th} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} p}, \\ \left[\frac{dy_1}{ds}\right]_{s=0} &= \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} p}, \end{aligned}$$

stoga kao infinitezimalnu rotaciju možemo uzeti također

$$Uf \equiv -\frac{\operatorname{th} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} p} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} p} \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{54}$$

S pomoću (45) možemo ovo prevesti u (50), samo će poradi protivnoga smisla rotacije biti i predznaci protivni.

12. Invarijante. Trajektorije za (44) i (54) već znademo. No pokazati treba, da kod rotacijâ oko početka koordinatnoga sistema ostaje invarijantan jednostavno neizmjerni sistem pravaca, koji prolaze početkom. Jednadžba je tih pravaca

$$\omega(x, y) \equiv \frac{\operatorname{th} y}{\operatorname{sh} x} = \operatorname{tg} \alpha,$$

zato je

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -\frac{\operatorname{th} y \operatorname{ch} x}{\operatorname{sh}^2 x}, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = \frac{1}{\operatorname{ch} y \operatorname{sh} x}.$$

Kad se ovo uvrsti u (54), biva

$$U\omega \equiv \frac{1}{\operatorname{sh} p}\left[\frac{\operatorname{th}^2 y \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh}^2 x} + 1 - \operatorname{th}^2 y\right],$$

Digitized by Google

a to se s pomoću (43) može transformirati u

$$U\omega \equiv \frac{1}{\cos^2\alpha \operatorname{sh} p},$$

dakle konstanta. Tako bismo isto mogli verificirati, da i obrnuto kod translacija duž pravaca (43) ostaje invarijantan skup koncentričnih krugova (45).

Infinitezimalnoj transformaciji (44) možemo s pomoću (43) lako dati oblik

$$Uf \equiv \frac{\cos\alpha}{\operatorname{ch}^2 y}\frac{\partial f}{\partial x} + \sin\alpha \operatorname{ch} x \frac{\partial f}{\partial y}. \qquad (55)$$

Ako uzmemo $\omega(x, y) \equiv \operatorname{ch} x \operatorname{ch} y - \operatorname{ch} p = 0$, imat ćemo

$$U\omega \equiv \frac{\cos\alpha \operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} y} + \sin\alpha \operatorname{ch}^2 x \operatorname{sh} y.$$

Ako pravac (43) presijeca krug (45) u tački $M(x, y)$, onda vidimo, da je

$$\cos\alpha = \frac{\operatorname{th} x}{\operatorname{th} p}, \quad \sin\alpha = \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} p},$$

a kad to uvrstimo u prethodnu jednadžbu, biva

$$U\omega \equiv \frac{\operatorname{sh}^2 x + \operatorname{sh}^2 y \operatorname{ch}^2 x}{\operatorname{sh} p}.$$

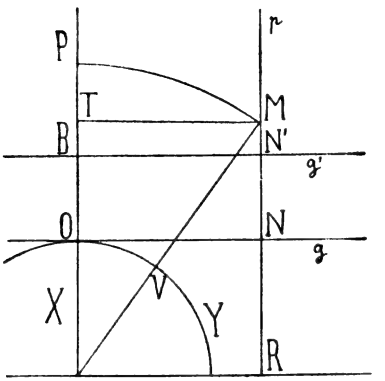
Uvedimo ovdje u brojniku samo hiperbolne kosinuse, pa ćemo naći

$$U\omega \equiv \operatorname{sh} p.$$

Geometrijski su ovi rezultati evidentni, jer pravci (43) jesu premjeri krugova (45).

Digitized by Google

13. Određivanje položaja tačke s pomoću graničnoga kruga i s pomoću ekvidistantne linije. Početkom O koordinatnoga sistema položimo granični krug normalno na os X; konkavnu svoju stranu neka taj krug okreće prema $+X$. Na slici 4. predočen je taj krug pravcem g. Tačkom M povucimo paralelu p sa $+X$; ona će granični krug sjeći u tački N. Pravokutne Descartesove koordinate tačke M označimo sa X, Y, pravokutne koordinate Lobačevskoga sa x, y, a koordinate graničnoga kruga sa ξ, η.



Slika 4.

$$SR = X, \quad MR = Y,$$
$$OP = x, \quad MP = y,$$
$$MN = \xi, \quad ON = \eta.$$

Vidi se, da je $\eta = X$. Dalje je

$$MN = OT, \quad \text{a} \quad ST = e^{OT}, \quad \text{t. j.} \quad Y = e^{\xi}.$$

Po formuli (5) u Primjedbama na str. 88. znamo, koji je snošaj među koordinatama Lobačevskoga i Descartesa. Zato možemo postaviti

$$\eta = e^{x} \operatorname{th} y,$$
$$e^{\xi} = \frac{e^{x}}{\operatorname{ch} y}. \tag{56}$$

No mogli bismo položaj tačke M odrediti i s pomoću ekvidistantne linije, kojoj je medijana os X Lobačevskoga i koja prolazi tom tačkom. Ona na osi Y odsijeca dužinu OV, koju ćemo uzeti kao jednu koordinatu v, a kao drugu u uzet ćemo luk ekvidistantne linije od osi Y do tačke M.

$$v = OV = MP = y. \quad u = VM = x \operatorname{ch} OV,$$

Digitized by Google

pa su dakle koordinate ekvidistantne linije

$$\begin{aligned} u &= x \operatorname{ch} y, \\ v &= y. \end{aligned} \tag{57}$$

14. Translacije po semicirkularnoj paraboli. Ona je mjesto tačaka jednako udaljenih od osi X i od graničnoga kruga,[10] koji normalno siječe os X i konkavnu svoju stranu okreće prema pozitivnomu dijelu te osi. Ne ćemo uzeti granični krug g, koji prolazi početkom koordinatnoga sistema, već drugi g', koji na osi X odsijeca dužinu b. Ako je M jedna tačka te krivulje, mora biti po definiciji

$$PM = MN'.$$

Vidi se da je $PM = y$. Ona dva granična kruga jesu ekvidistantni; odresci paralelâ prema $+X$, što leže među ova dva granična kruga, jednaki su među sobom. Stoga je $MN' = \xi - b$, pa je tako

$$y = \xi - b,$$

ili

$$e^y = e^{\xi} \cdot e^{-b}$$

S obzirom na (56) možemo pisati

$$e^y = \frac{e^{x-b}}{\operatorname{ch} y}, \tag{57}$$

a kad još ch$y$ izrazimo eksponencijalnom funkcijom, izlazi

$$e^y = \sqrt{2e^{x-b} - 1} \tag{58}$$

kao jednadžba semicirkularne parabole.

Da vidimo, čim je ona predočena u onoj realnoj interpretaciji hiperbolne geometrije, koja je prikazana u Primjedbama, trebamo se sjetiti sa str. 88. te rasprave jednadžbi

---

[10] Liebmann, str. 182. To je također mjesto tačaka jednako udaljenih od graničnoga kruga $\xi = 0$ i ekvidistante $y = -b$, kojoj je medijana os X.

Digitized by Google

$$e^{-y} = \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{Y}{X},$$

koje daju

$$e^{y} = \frac{Y}{-X+\sqrt{X^2+Y^2}};$$

iz (57) izlazi

$$e^{b} = \frac{Y}{e^{y}},$$

pa je tako konačno

$$Y^2 - 2e^b X - e^{2b} = 0. \tag{59}$$

Semicirkularna parabola (58) hiperbolne ravnine predočena je onim dijelom parabole (59), koji leži u pozitivnoj polovini ravnine (X, Y).

Iz

$$e^{2y} = 2e^{x-b} - 1 \tag{58*}$$

nalazimo

$$ds = dy\,\sqrt{e^{2y}+1},$$

$$ds = \frac{e^{x-b}\sqrt{2e^{x-b}}}{2e^{x-b}-1}\,dx,$$

i onda

$$s = \sqrt{e^{2y}+1} + \frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{e^{2y}+1}-1}{\sqrt{e^{2y}+1}+1} + \frac{1}{2}\log(3+2\sqrt{2}) - \sqrt{2}.$$

Luk računamo od presjeka krivulje s osju X.

Konačne su jednadžbe ove translacije, ako logaritam izrazimo inverznom hiperbolnom funkcijom

$$\sqrt{e^{2y_1}+1} - \operatorname{arc\,coth}\sqrt{e^{2y_1}+1} = s + \sqrt{e^{2y}+1} - \operatorname{arc\,coth}\sqrt{e^{2y}+1},$$

$$\sqrt{2e^{x_1-b}} - \operatorname{arc\,coth}\sqrt{2e^{x_1-b}} = s + \sqrt{2e^{x-b}} - \operatorname{arc\,coth}\sqrt{2e^{x-b}}.$$

Infinitezimalna je transformacija

$$Uf \equiv \frac{2e^{x-b}-1}{e^{x-b}\sqrt{2e^{x-b}}}\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{1}{\sqrt{e^{2y}+1}}\frac{\partial f}{\partial y}. \tag{60}$$

Digitized by Google

15. Invarijante. Trajektorije su semicirkularne parabole (58*). Ako (60) pišemo

$$Uf \equiv \frac{2e^{x-b}-1}{e^{x-b}\sqrt{e^{2y}+1}}\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{1}{\sqrt{e^{2y}+1}}\frac{\partial f}{\partial y}$$

i uzmemo

$$\omega(x, y) \equiv e^{2y} - 2e^{x-b} + 1 = 0, \quad \frac{\partial \omega}{\partial y} = 2(2e^{x-b}-1),$$

dobivamo

$$U\omega \equiv 0.$$

Ortogonalne su trajektorije sistema (58*) dane jednadžbom

$$e^{-2y} = 2e^{x-b} - 1. \tag{61}$$

Dobivene su refleksijom rečenoga sistema na osi X.

Inhaltsangabe der Abhandlung

„Über die Transformationen in der Lobatschefskij'schen Ebene".

Auf Grund der projectiven Substitutionen einer complexen Variablen sind diese Transformationen vielfach behandelt worden. In der vorstehenden Abhandlung werden einige Bewegungen der Lobatschefskij'schen Ebene analytisch direct untersucht. Für die betreffenden Transformationen wird zuerst die Bogenlänge der Bahncurven mittels Abscissen und Ordinaten der Endpunkte ausgedrückt, und so die endlichen Gleichungen aufgestellt, aus denen man die Gruppeneigenschaft sofort ersieht. Mit Hilfe der infinitesimalen Transformation werden dann die Invarianten der Gruppe bestimmt.

Die Translationen auf den Abstandslinien zur x-Axe sind charakterisiert durch die infinitesimale Transformation (2). Die erweiterte Transformation hat dieselbe Form. Das Linienelement schliesst mit der Abstandslinie, auf der sein Punkt bewegt wird, immer denselben Winkel ein. Die Schar der Normalen zur x-Axe verbleibt bei diesen Bewegungen unverändert; einzelne Normalen werden unter einander permutiert. Die infinitesimale Translation längs diesen Normalen hat dieselbe Form (4), wie die Bewegung

Digitized by Google

parallel zur y-Axe in der gewöhnlichen Ebene. Für die Schiebungen längs den Normalen (14) und den Abstandslinien (20) zur y-Axe bestehen etwas compliciertere Ausdrücke (18) und (26). Die mangelnde Symmetrie der Gleichungen dieser Gebilde in Bezug auf die Lobatschefskij'schen Coordinatenaxen wird im § 9. mittels Weierstrass'schen Coordinaten hergestellt.

Die endlichen Gleichungen der Translationen längs den Parallelen zur positiven x-Axe sind in (8) gegeben, die infinitesimale Form in (9). Diese Formeln gelten nur in dem, durch die vier gemeinsamen Parallelen zu den Coordinatenaxen gebildeten, ebenen Vierende. Hier sind die Niveaulinien Grenzkreise, deren Axen jene Parallelen sind. Die Drehungen um das gemeinsame Ende dieser Grenzkreise sind durch (12) und (13) bestimmt. Weiters haben wir die hyperbolische Strahlung (44) und die Rotation um den Coordinatenanfangspunkt (49) und (50), respective (53) und (54). Die Bahncurven sind die Geraden durch den Anfangspunkt, und die Kreise, mit dem Anfangspunkt als Mittelpunkt. Die Bahncurven der einen Bewegung sind Niveaulinien für die andere. In (60) ist noch die infinitesimale Translation längs der semizirkularen Parabel gegeben.

Digitized by Google

Prilog centralnoj projekciji prostora sa četiri dimenzije.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 5. srpnja 1906.

NAPISAO ČLAN DOPISNIK DR. JURAJ MAJCEN.

Držeći se načelâ W. Fiedlera, koji je usavršio metodu centralnoga projiciranja za prostor sa tri dimenzije, prikazao je H. de Vries[1] nauk o centralnom projiciranju za prostor sa četiri dimenzije i obazreo se na projektivna i metrična pitanja u ovom problemu. Držim, da će centralno projiciranje prostora R_4, kad bude formalno dotjerano, pružiti u istraživanju projektivnih relacija zanimljivih novosti, koje će izaći iz sveze prostora R_4 i prostora R_2 sa dvije dimenzije. Dakako da ono, što je već Vries u tom pogledu našao, na primjer proširenje Desargues-ova zakona, ne izlazi upravo iz centralnoga projiciranja prostora R_4, već se može mnogo jednostavnije izvesti u ortogonalnom projiciranju na dvije ravnine s pomoću ravnine identičnosti.

U početku, dok je još metoda centralnoga projiciranja za prostor R_4 u razvoju, bit će svakako najzanimljivije pitanje o predočenju one tvorevine, koja se za prostor R_3 nije mogla uzeti u obzir, a to je predočivanje svakoga prostora R_3, koji je u prostoru R_4. U svezi s određenjem projekcije za neki prostor R_3 javlja se prije svega pitanje o centralno-projektivnom određenju točke; na ovo

[1] *Die Lehre von der Zentralprojektion im vierdimensionalen Raume*, Leipzig 1905.

Digitized by Google

se pitanje obazreo G. Loria u jednome svome članku[1], u kojem razjašnjuje, da se točka (osim svojom projekcijom) može još pobliže odrediti prostorom, ravninom ili pravcem. Veronese provodi u svojoj općenoj centralnoj projekciji prostorâ (sa n dimenzija) određenje točke s pomoću pravca[2]. Ovo je određenje za čudo pridržao i Vries u centralnoj projekciji za prostor R_4 (l. c. str. 12). Loria ispituje metode, gdje su točke određene zadanim prostorima, no ne izvodi konstrukcije u R_2, nego prikazuje operacije shematično, jer su projekcije u R_2 veoma zamršene.

Ja sam si ovdje stavio zadaću, da prikažem metodu, gdje je točka određena ravninom. Ova se metoda u jednu ruku razlikuje od one, koju je razvio Loria, toliko, da prijelaz iz jedne metode u drugu ne će biti lako moguć[3]. U drugu ruku dopušta ova metoda jednostavnije operacije u R_2, negoli metoda Vriesova. Priroda ove metode dovodi sa sobom drugi poredak u postepenom izvođenju projektivnih problema u centralnoj projekciji, negoli je onaj, koji su udesili Loria i Vries; zato ne će biti ovdje temeljni problem: određenje sastavnice dviju točaka, kao kod Lorie, ni: određenje nekoga prostora R_3, kao kod Vriesa, nego određenje ravnine, koja ide pravcem i točkom. Ostali se temeljni problemi (a dolaze u obzir osobito oni, u kojima je točka zadan elemenat) dadu svesti na ovaj, pače se problem, koji je Loria izabrao kao prvi, dade razriješiti posve samostalno.

U tumačenju, koje slijedi, pridržao sam način za označivanje elemenata kako ga je uveo Vries.

1. Neka je pravac p zadan projekcijom p_{01} (sl. 1.) i karakterističnim točkama R_{01}, S_1, Q_{01}, S_{01}, dalje točka P svojom projek-

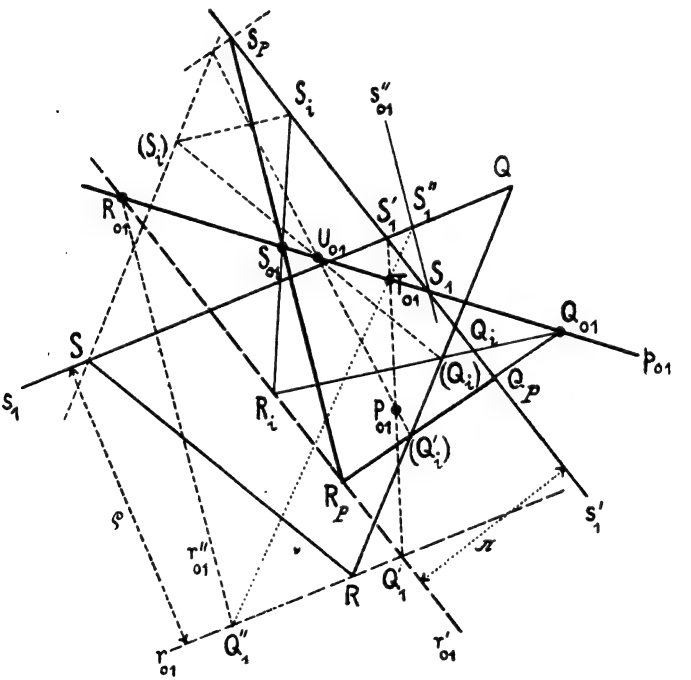
[1] *Sur quelques problèmes élémentaires de la Géométrie descriptive à 3 et 4 dimensions*, Archiv der Mathematik und Physik, III. Reihe, II. B., 1902., str. 257.—266.

[2] *Sulla geometria descrittiva a quattro dimensioni*, Atti del R. Istituto Veneto, VIII., 1882., str. 987.—1024., dalje: „*Behandlung der projektivischen Verhältnisse der Räume von verschiedenen Dimensionen durch das Princip des Projicirens und Schneidens*, Math. Annalen, XIX. 2.

[3] Isp. bilješku u citiranom članku na str. 262.

Digitized by Google

cijom P_{01} i ravninom ρ, koja prolazi kroz P. Ravnina je ρ određena pravcima r_{01} i s_1, pa karakterističnim trokutom R_ρ, S_ρ, Q_ρ, gdje je R_ρ na r_{01}, a S_ρ i Q_ρ na s_1. Karakteristični trokut ravnine ρ moći ćemo poradi kratkoće označiti sa $(RSQ)_\rho$. Da se odredi r a v n i n a π, koja ide točkom P i pravcem p, položit će se ovim pravcem r a v n i n a, koja ravninu ρ s i j e č e u t o č k i P. Kako će se za ravninu π morati naći oba paralelna pravca r'_{01} i s_1' i karakteristični trokut $(R_P S_P Q_P)_\pi$, zadovoljit će u rješenju oba karakteristična trokuta zadani uvjet onda, ako će se sastavnice sjecištâ korespondentnih stranica sa sjecištima pravaca, koji su suprotnim vrhovima povučeni paralelno korespondentnomu paru stranicâ, sjeći u točki P.



Sl. 1.

Prije svega ćemo potražiti za ravninu π oba pravca r'_{01} i s_1'. Točkama ćemo R_{01} i S_1 povući makar kakova dva paralelna

Digitized by Google

pravca r''_{01} i s''_1, koji sijeku r_{01} i s_1 u točkama Q''_1 dotično S''_1. Sastavnica $Q''_1S''_1$ siječe projekciju p_{01} u točki T_{01}. Planimetrijski je očigledno, da će sve sastavnice $Q''_{1i}S''_{1i}$, koje sastavljaju sjecišta Q''_{1i} i S''_{1i} pravaca r_{01} i s_1 s makar kojim parom paralelâ r''_{01i}, s''_{1i} kroz R_{01} i S_1 ići istom onom točkom T_{01}. Povučemo li dalje pravac $T_{01}P_{01}$, koji siječe r_{01} u Q_1', a s_1 u S_1', dobit ćemo u sastavnicama S_1S_1', $R_{01}Q_1'$ dva paralelna pravca s_1' i r'_{01}, koji su potrebni za određenje ravnine π. Stranice s_1' i s_1 karakterističnih trokutâ za ravnine π i ρ sjeći će se naime u točki S_1', a paralele s ovim stranicama kroz suprotne vrhove daju sjecišnu točku Q_1', pa će sastavnica $Q_1'S_1'$ prolaziti u istini točkom P_{01}. Ovo je samo jedan dio rješenja. Prije negoli nastavimo određenje ravnine π, istražit ćemo, kakovo ima značenje točka T_{01} u prostoru R_4.

Ravninom $(RSQ)_\rho$ može se položiti prostor, koji ide i središtem projiciranja. Ovaj ćemo prostor označiti sa R^{03}_ρ. Isto će se tako moći svakom ravninom, koja ide pravcem p, položiti po jedan prostor $R^{03}_{\pi_i}$, gdje π_i znači makar koju ravninu svežnja $[p]$. Prostor R^{03}_ρ i makar koji od prostorâ $R^{03}_{\pi_i}$ imadu jednu zajedničku ravninu, koia ide središtem projiciranja. Projekcija ove ravnine bit će spojnica sjecišta $r^{\pi_i}_{01}$ r_{01} sa sjecištem $s^{\pi_i}_1$ s_1. Budući da je pravac p u svim prostorima $R^{03}_{\pi_i}$, sjeći će on svaku ravninu, koja je zajednička prostorima $R^{03}_{\pi_i}$ i R^{03}_ρ. No budući da pravac uopće nije u prostoru R^{03}_ρ, sjeći će on ovaj prostor samo u jednoj točki. Ovom točkom moraju dakle prolaziti sve ravnine $(R^{03}_{\pi_i}, R^{03}_\rho)$, dakle u projekciji sve sastavnice točaka $(r^{\pi_i}_{01}, r_{01})$ i $(s^{\pi_i}_1 s_1)$ istom točkom T_{01} na p_{01}.

Ravnina π nije još dostatno određena tragovima r'_{01} i s_1', nego će se morati odrediti još i karakteristični trokut $(R_PS_PQ_P)_\pi$. Vrh R_P ovoga trokuta bit će u r'_{01}, ostala dva njegova vrha u s_1', a njegove će stranice R_PS_P i R_PQ_P ići točkama S_{01} i Q_{01} na p_{01}. Ovaj se trokut ima tako odrediti, da spojnica sjecišta (R_PS_P, RS) sa sjecištem paralelâ u Q_P i Q (koje odgovaraju stranicama R_PS_P

Digitized by Google

i RS) ide točkom P_{01}. Nužna će posljedica biti, da će i spojnica sjecišta ($R_P Q_{P_1}$ RQ) sa sjecištem paralela u S_P i S (koje odgovaraju prvim dvjema stranicama), ići opet točkom P_{01}.

Da odredimo trokut $(R_P S_P Q_P)_\pi$, postupat ćemo ovako. Izabrat ćemo makar koju točku R_i na r'_{01}. Sastavnice R_i S_{01} i $R_i Q_{01}$ sijeku s_1' u točkama S_i i Q_i. Pravac $R_i Q_{01}$ siječe RQ u točki (Q_i), a pravac povučen točkom S_i paralelno sa $R_i Q_{01}$ siječe pravac, koji ide točkom S paralelno s tragom RQ, u točki (S_i). Sastavnica $(S_i)(Q_i)$ siječe projekciju p_{01} u točki U_{01}. Pravac će $U_{01} P_{01}$ sjeći RQ u točki (Q_i'); s pomoću ove točke moći ćemo karakterističnu trokut ravnine π ovako odrediti. Spojnica $(Q_i')\, Q_{01}$ siječe r'_{01} u točki P_P, a trag s_1' u točki Q_P. Pravac $R_P S_{01}$ daje u sjecištu s tragom s_1' treću točku S_P karakterističnoga trokuta. Valjanost ove konstrukcije dokazat ćemo tako, da pokažemo, koje značenje ima točka U_{01} pravca p u prostoru R_4.

Svi trokuti $R_i S_i Q_i$, gdje je R_i svagda u r'_{01}, a S_i i Q_i u s_1', određuju zajedno sa r'_{01} i s'_1 jedan dio (∞^1) ravninâ, koje idu pravcem p. Ove ravnine nijesu uopće identične s ravninama, za koje su tragovi r^i_{01}, s^i_1 različni od r'_{01} i s_1', a idu točkama R_{01} i S_1 pravca p_{01}, jer je broj ravninâ, koje se mogu u prostoru R_4 položiti pravcem p, ∞^2. Svakom ravninom $R_i S_i Q_i$ možemo položiti prostor R^i_3, koji je prema prostoru projekcijâ R^p_3 „trećinu okomit“[1]; isto tako možemo ravninom $(RSQ)_\varrho$ položiti jedan takov prostor R^ϱ_3. Ovaj će prostor R^ϱ_3 sjeći svaki prostor R^i_3 u jednoj ravnini π^i, za koju je projekcija u R^p_4 pripadna sastavnica $(S_i)(Q_i)$. Budući da je pravac u svim prostorima R^i_3, sjeći će on svaku ravninu π^i u jednoj točki; no kako je ujedno svaka ravnina π^i u prostoru R^ϱ_3, a pravac p nije uopće u ovom prostoru, morat će sve ravnine π^i prolaziti istom točkom na p, jer bi inače svaka zajednička točka pravca p i ravninâ π^i bila u prostoru R^ϱ_3, a poradi toga bi p bio pravac prostora R^ϱ_3. Projekcije će dakle $(S_i)(Q_i)$ ravninâ π^i iz C_1 ići točkom U_{01} na pravcu p_{01}, pa je prema tomu točka

[1] Isp. Vriesa, str. 32., dalje djelo Schoute-ovo *Mehrdimensionale Geometrie* I., str. 47.

Digitized by Google

U probodište pravca p s onim prostorom R_3^q, koji je prema prostoru projekcijâ R_3^p „trećinu okomit“.

Ravnina π ide u istini pravcem p, a siječe ravninu ρ u točki P. Izvođenje konstrukcije bit će kraće, negoli izgleda, a svakako će biti kraće negoli rješenje Vriesovo, koji upotrebljava pomoćni neki prostor. U našem rješenju nije trebalo odrediti nikakova prostora; oni prostori, koji se spominju u izvođenju, bili su potrebni samo za dokaz konstrukcije.

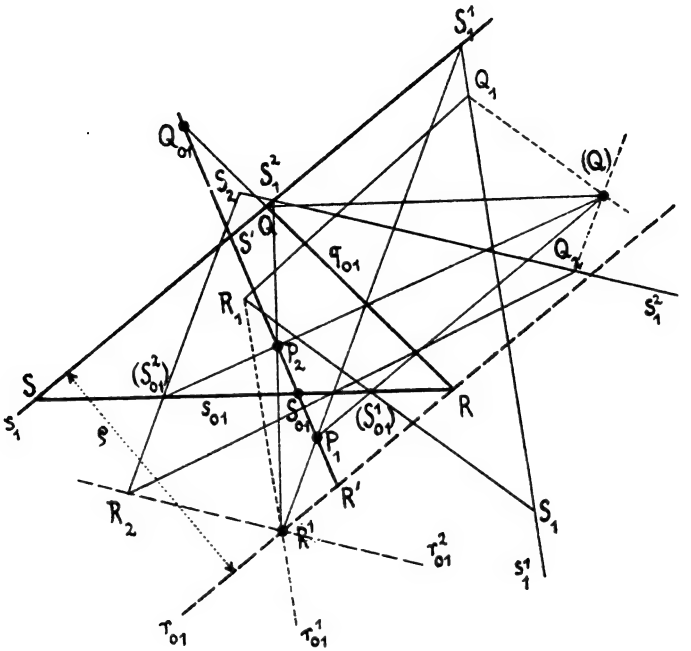
2. S pomoću predašnjega rješenja možemo odrediti centralnu projekciju sastavnice dviju točaka P i T, koje su zadane u pripadnim ravninama π i τ. Obje će se ravnine uopće sjeći samo u jednoj točki V. Povučemo li ovom točkom pravac VT, koji je prema tomu u ravnini τ, imat ćemo samo još ovim pravcem i točkom P položiti ravninu, kao što je bilo prije izvedeno.

No ova se zadaće može riješiti još jednostavnije. Odredit će se naime oba pravca VT i VP; budući da se sijeku u jednoj točki, moći će se njima položiti ravnina, a u ovoj će ravnini biti i sastavnica PT.

Sjecišna točka V obadviju ravnina $(R'S'Q')_\pi$ i $(R''S''Q'')_\tau$ naći će se poznatim načinom. Pravac VP, koji je u ravnini π, sjeći će stranice karakterističnoga trokuta $R'S'Q'$ u točkama S_{01}', Q_{01}', S_1'. Pravac će VT sjeći opet stranice karakterističnoga trokuta $R''S''Q''$ u točkama S_{01}'', Q_{01}'', S_1''. Sastavnica $S_1'S_1'' \equiv s_1$ bit će jedan trag tražene ravnine ρ. Budući da su oba pravca VP i VT u ovoj ravnini, sjeći će se sastavnice $Q_{01}'Q_{01}''$ i $S_{01}'S_{01}''$ u točki R, koja će biti u drugom tragu ravnine ρ. Ovaj će dakle drugi trag biti paralela povučena točkom R sa tragom s_1. S pomoću ravnine ρ i njezina karakterističnoga trokuta naći će se točke R_{01}, S_1, Q_{01}, S_{01} pravca PT, pa je zato projekcija njegova određena. (Ovakov je način upotrijebio Loria u centralnoj projekciji prostora sa tri dimenzije.)

Pokazat ću napokon još jedan način za određenje sastavnice dviju točaka, u kojem nije nužno poznavati presječnu točku V

Digitized by Google



Sl. 2.

ravninâ, koje određuju zadane točke (sl. 2.) U ravninama $(R_1S_1Q_1)_{\pi_1}$ i $(R_2S_2Q_2)_{\pi_2}$ neka su zadane točke P_1 i P_2. Da se odredi projekcija sastavnice P_1P_2, bit će nužno i dovoljno, da se odredi jedna ravnina, koja ide objema točkama. Ova će dakle ravnina ϱ, za koju treba odrediti tragove r_{01} i s_1, pa karakteristični trokut $(RSQ)_\varrho$, morati sjeći ravninu π_1 u točki P_1, a ravninu π_2 u točki P_2. Ako bismo imali tragove s_1 i r_{01} ove ravnine, morala bi sastavnica sjecišne točke S_1^1 traga s_1 s tragom s_1^1 i sjecišne točke traga r_{01}^1 i traga r_{01} prolaziti točkom P_1, jer su pravci r_{01}^1 i s_1^1 tragovi ravnine π_1. Isto bi tako morala ići točkom P_2 sastavnica sjecišnih točaka $(s_1^2s_1) \equiv S_1^2$ i $(r_{01}^2r_{01}) \equiv R^2$. No lako ćemo moći učiniti, da točka R^2 bude u točki $(r_{01}^1r_{01}) \equiv R^1$. Sjecište ćemo naime R^1 tragovâ r_{01}^1 i r_{01}^2 spojiti s točkama P_1 i P_2. Prva će sastavnica sjeći s_1^1 u točki S_1^1, a druga će sjeći trag s_1^2 u točki S_1^2. Pravac će

Digitized by Google

dakle $s_1 \equiv S_1^1 S_1^2$ biti jedan trag tražene ravnine ρ, a paralela povučena točkom R_1 s ovim tragom bit će pravac r_{01}, dakle drugi trag ove ravnine. Ovo je prvi uvjet za to, da su točke P_1 i P_2 probodišta ravninâ π_1 i π_2 s ravninom ρ. Od sastavnice P_1P_2 poznate su nam dakle već obje karakteristične točke R' i S' u tragovima r_{01} i s_1. Imamo još odrediti točke S_{01} i Q_{01} ovoga pravca, a to ćemo učiniti s pomoću pravaca s_{01} i q_{01}, koji određuju ravninu ρ. Točku R karakterističnoga trokuta ove ravnine ρ možemo doduše izabrati po volji na tragu r_{01}, no onda su ostala dva vrha S i Q ovoga trokuta na s_1 već određena. Jednostavniji će postupak biti, ako odredimo jednu stranicu trokuta, na pr. SR. Točkama Q_1 i Q_2 povući ćemo paralele s tragovima R_1S_1 i R_2S_2 pripadnih ravnina π_1 i π_2; ove će se paralele sjeći u točki (Q). Spojnica $(Q)P_1$ siječe R_1S_1 u točki (S_{01}^1), a spojnica $(Q)P_2$ siječe R_2S_2 u točki (S_{01}^2). Pravac $(S_{01}^1)(S_{01}^2) \equiv RS$ siječe trag r_{01} ravnine ρ u točki R, trag s_1 u točki S, a paralela povučena s ovim pravcem točkom (Q) siječe trag s_1 u točki Q, pa je trokut RSQ traženi karakteristični trokut ravnine ρ. Potražimo li naime presječnu točku ravninâ ρ i π_1 ili ρ i π_2 s pomoću stranice RS i stranicâ R_1S_1 dotično R_2S_2, dobit ćemo u istini sjecišne točke P_1 i P_2 na pravcima $R^1S_1^1$ i $R^1S_1^2$. Iste će se ove sjecišne točke dobiti poradi toga i iz stranicâ RQ i R_1Q_1, R_2Q_2. Suvišno je i spomenuti, da smo mogli najprije odrediti stranicu RQ trokuta RSQ, a najposlije točku S.

Karakteristični trokut $(RSQ)_\rho$ određuje u presjecima svojih stranica s_{01} i q_{01} s projekcijom sastavnice P_1 i P_2 obje točke S_{01} i Q_{01}, pa je tako sastavnica određena. Ovaj će način određenja biti po svoj prilici najjednostavniji, jer nije potrebna konstrukcija sjecišta V obiju ravnina π_1 i π_2.

Ako je jedna točka P_1 zadana u ravnini π_1, a druga P_2 na pravcu p_2, moći će se za određenje sastavnice P_1P_2 upotrijebiti makar koja od ovih triju prikazanih konstrukcija. Najbolje će u ovom slučaju poslužiti prvo rješenje, jer će se moći odmah pravcem p_2 i točkom P_1 položiti ravnina ρ.

Digitized by Google

3. Da se nekom ravninom π i točkom P, koja je pobliže određena ravninom $(R'S'Q')$, položi prostor Π_3, moći će se postupati na više načina. Odredit će se na primjer sjecišna točka V ravninâ π i $(R'S'Q')$, pa će se onda pravcem VP i makar kojom točkom X ravnine π položiti ravnina. Obje će se ove ravnine sjeći u pravcu VX, pa će zato biti u istom prostoru Π_3. Drugi će način rješenja biti ovaj. U ravnini će se π izabrati pravac x, pa će se ovim pravcem i točkom P položiti ravnina ξ. U ovom se načinu dade određenje ravnine ξ znatno pokratiti. Trag s_1 ove ravnine možemo izabrati posve po volji. Taj će trag sjeći pravac $Q'S'$ ravnine $(R'S'Q')$ u točki S''. Budući da ravnina ξ mora ići točkom P, morat će sastavnica $S''P$ ići sjecištem R'' pravaca, koji su povučeni točkama R i R' paralelno sa stranicama s_1 i $S'Q'$ karakterističnih trokuta za ravnine ξ i $(R'S'Q')$. Uza to dakako nije potrebno ni znati, gdje je točka R. Ona će biti na pravcu, koji ide sjecištem R'' paralelno sa s_1. Ovaj će dakle pravac r_{01} biti drugi trag tražene ravnine ξ. Budući da su ravnine ξ i π u istom prostoru, sjeći će se u pravcu x, koji je dostatno određen sa dvije točke. Jedna je točka sjecište traga s_1 sa stranicom $Q_\pi S_\pi$, a druga je sjecište pravaca, koji su točkama R i R_π povučeni paralelno sa s_1 i $S_\pi Q_\pi$. Jedna je od ovih paralela pravac r_{01}. Da se ravnina ξ potpuno odredi, trebat će još odrediti njezin karakteristični trokut, a to se može učiniti s pomoću točke U_{01} na x, kako je bilo pokazano u čl. 1.

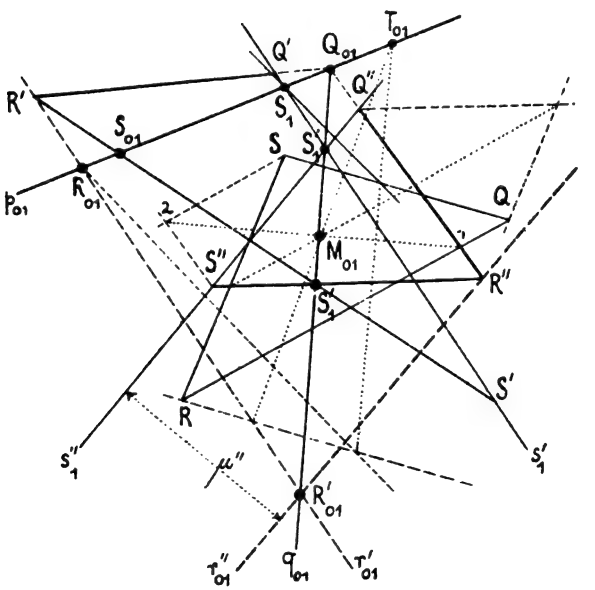
4. Vries prikazuje određenje nekoga prostora samo za taj slučaj, da su zadana dva pravca onoga prostora. Ako je zadan pravac p i dvije točke M i N, bit će određenje po Vriesovu načinu spojeno s dugotrajnom konstruktivnom operacijom, jer će se najprije morati odrediti pomoćni jedan prostor i sastavnica točaka M i N u ovom prostoru. Onda će se tek položiti prostor, koji ide pravcima p i MN. Ako su točke M i N određene u R_4 s pomoću dviju ravnina μ i ν, moći će se određenje prostora Σ_3 svesti na predašnje operacije. Moći će se na primjer naći sastavnica MN s pomoću ravninâ μ i ν, pa onda odrediti prostor $\Sigma_3 \equiv (p, MN)$. Ili će se točkom M i pravcem p položiti jedna, a točkom N i istim ovim pravcem druga ravnina. Obje će ove rav-

Digitized by Google

nine biti u istom prostoru Σ_3, koji se traži. Napokon se može pravcem p i jednom točkom (M) položiti ravnina, a onda ovom ravninom i drugom točkom prostor Σ_3.

Najjednostavnije će rješenje ove zadaće biti ovo. Točkom M položit će se makar kakova ravnina μ'', koja siječe pravac p u jednoj točki P', a točkom N opet ravnina ν'', koja p siječe u P''. Pravac p i svaka sastavnica MP' i NP'' određuju dvije ravnine, koje su u istom prostoru Σ_3. Ova će konstrukcija biti zato najjednostavnija, jer će se ravnine μ'' i ν'' moći točkama M i N položiti tako, da sijeku pravac p u istoj točki $P' \equiv P'''$. Osim toga se može uzeti ova točka u neizmjerno dalekoj točki na p, t. j. točkama će se M i N položiti ravnine μ'' i ν'' paralelno s pravcem p.

U određenju prostora Σ_3, koje slijedi, prikazana je dakle ujedno i konstrukcija r a v n i n e (μ''), koja je t o č k o m (M) položena p a r a l e l n o s a z a d a n i m p r a v c e m (p). U sl. je 3. prikazano samo određenje ovakove ravnine μ''. Druga se ravnina (ν'') dobiva posve istim postupkom, a onda je i prostor Σ_3 određen.



Sl. 3.

Digitized by Google

Pravac je p zadan svojom projekcijom p_{01} i karakterističnim točkama R_{01}, S_{01}, S_1, Q_{01}. Točka je M određena svojom projekcijom M_{01} i karakterističnim trokutom (RSQ). Točkom M ide samo jedna paralela q s pravcem p. Centralna će projekcija pravca q ići točkom Q_{01} na p_{01}. Osim toga će pravci p i q biti u istoj ravnini. Tragovi r'_{01}, s_1' ove ravnine naći će se prije istumačenim načinom (čl. 1.) s pomoću točke T_{01} na p_{01}, a uzet će se u obzir i to, da će u ovoj ravnini biti točka M_{01}. Na pravcu q_{01} imamo dakle tri karakteristične točke, i to Q_{01}, $S_1' \equiv (s_1', q_{01})$, $R'_{01} \equiv (r'_{01}, q_{01})$. Preostaje još određenje četvrte točke S'_{01}.

Pravcem q možemo položiti ∞^2 ravninâ (μ''), koje će biti paralelne s pravcem p. Tragove r''_{01}, s''_1 ovakove ravnine možemo po volji položiti točkama R'_{01} i S_1'. Budući da je broj mogućih ravnina (μ'') upravo ∞^2, možemo i jedan vrh karakterističnoga trokuta za makar koju ovakovu ravninu izabrati po volji.

Izabrat ćemo R'' na r''_{01}. Jedna će stranica karakterističnoga trokuta biti sastavnica $R''Q_{01}$, jer je pravac q u ravnini μ'', koja se određuje. Prema tomu je sjecišna točka $(s''_1, R''Q_{01}) \equiv Q''$ drugi vrh trokuta za ravninu μ''. Treći će se vrh S'' ovoga trokuta odrediti ovako. Stranica $R''Q''$ i stranica RQ trokuta one ravnine, u kojoj je zadana točka M, daju sjecište 1. Paralele u S'' i S sa stranicama $R''Q''$ i RQ sijeku se u točki 2, tako da sastavnica 12 ide točkom M_{01}, a to s toga razloga, što obje ravnine imadu zajedničku točku M. Točka će se dakle S'' naći u presjeku traga s''_1 i paralele povučene točkom 2 s pravcem $R''Q''$. Pravac je $R''S''$ treća stranica trokuta za ravninu μ''.

Budući da je pravac q u ovoj ravnini, bit će sjecište S'_{01} projekcije q_{01} sa stranicom $R''S''$ tražena četvrta točka za q_{01}. Ova će se ista točka dobiti istim načinom za makar koji trag r''_{01} (kroz R'_{01}) i za makar koju njegovu točku R''. Budući da su opet pravci p i q u istoj ravnini, određen je i karakterističan njezin trokut. Treba samo spojiti S'_{01} sa S_{01} na p_{01}; ova sastavnica siječe r'_{01} u R', a pravac $R'Q_{01}$ daje u presjeku sa s_1' vrh Q'. U ovoj je ravnini pravac p i točka M. Prikazan je dakle s pomoću para-

Digitized by Google

lelne ravnine ϱ'' nov način za određenje ravnine, koja ide pravcem i točkom. Ovdje dakle ne će trebati odrediti točke U_{01} kao u čl. 1.

Za ravninu, koja ide pravcem p i drugom zadanom točkom N, ne će trebati naći cijeli karakteristični trokut $R'''S'''Q'''$, nego će biti dovoljno, ako je poznat samo jedan njegov vrh. Ovako će biti određen smjer triju paralela, koje prikazuju centralnu projekciju prostora Σ_3.

Ovim će postupkom biti znatno pokraćene i ostale sastavljene projektivne operacije u prostoru R_4, a i u metričkim problemima moći će se upotrijebiti istumačene polakšice. Centralna nam je projekcija u prostoru sa tri dimenzije pokazala, koje momente imamo uzeti u obzir, da cijeli sistem ove vrste projiciranja učinimo što jednostavnijim. Ovi će se isti momenti imati uzeti u obzir već u početku centralnoga projiciranja za prostor R_4 osobito zato, da ne bi u razvoju istraživanja nastale zapreke poradi formalnih poteškoća.

Résumé.

Ci-dessus j'ai donné quelques „Annotations à la projection centrale de l'espace à quatre dimensions". Il s'agit d'une manière de détermination d'un point dans la projection centrale à quatre dimensions, différente de celle qui a été établie par M. Veronese et M. de Vries (voir les mémoires cités). J'ai admis la proposition de M. Loria, en fixant un point quelconque par un plan, mais je développe les projections dans le plan R_2, et je m'efforce à simplifier les constructions autant que possible. Or, il ne sera pas facile de passer de cette manière à celle de M. Loria qui a pour but: développer les opérations (dans l'espace), en déterminant un point par un espace quelconque.

J'ai pris en considération seulement ces opérations projectives qui dépendent d'un ou de plusieurs points donnés, en ayant posé, comme fondamentale, la détermination d'un plan qui passe par un point et une droite donnée. Par ce procédé on n'aura pas besoin de déterminer des espaces (à trois dimensions) auxiliaires quand il s'agit d'effectuer des problèmes qui ne dépendent que des points, droites et plans.

On voit sur la figure 1e la détermination du plan π, passant par la droite p et par le point P, fixé dans un plan ϱ. Il

Digitized by Google

s' agit de mener un plan (π) par p qui coupe le plan ρ dans le point P. Il sera nécessaire de connaître la trace s_1' et la droite de fuite r_{01}' et puis les deux droites R_PQ_P et R_PS_P de ce plan (π). Les premières deux droites seront trouvées à l' aide d' un point T_{01} sur p, et les deux autres à l' aide d' un point U_{01} sur la même droite. Ces deux points sont les intersections de la droite p avec deux espaces R_3, menés par le plan ρ, dont le premier contient le centre de projection (C_0) et dont l' autre est $^1/_3$ perpendiculaire sur l' espace de projection R_3^p. On donne la construction planimétrique de ces points par un procédé bien simple, sans y faire recours à la détermination constructive des espaces auxiliaires.

Sur la figure 2e on donne une détermination de la droite de jonction des deux points P, T, donnés dans les plans respectifs π et τ. Il s' agit de mener un plan qui coupe les deux plans donnés dans les deux points donnés respectifs, sans emploi du point commun aux plans π et τ, et sans usage des espaces auxiliaires.

Ayant démontré, comment on se sert de ces méthodes dans le cas de détermination d' un espace, passant par un point et par un plan donné, j' ai traité enfin la question de détermination d' un espace qui contient une droite et deux points donnés. J' y ai fait usage des plans, menés par les points donnés, parallèlement à la droite donnée (fig. 3e). Cette solution contient une manière de faire passer un plan par une droite et un point, autre que celle-là qui était établie plus haut.

Par ces procédés on rendra plus courtes les constructions des autres problèmes simples et composés. La dénotation et le développement de la projection centrale sont d' ailleurs d' accord avec la manière due à M. de Vries.

Digitized by Google

O zakonu recipročnosti za ostatke l^n-tih potencija u algebarskim brojnim tjelesima, ako je l prost broj.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 30. svibnja 1906.

NAPISAO DR. STJEPAN BOHNIČEK.

Metoda, kojom sam se poslužio pri dokazivanju zakona recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija u algebarskim brojnim tjelesima, vodi do cilja i pri istraživanju ostataka l^n-tih potencija. Prema sadašnjem je stanju znanosti bitni dio dokaza za zakon recipročnosti poznavanje zakona recipročnosti u izvjesnim kružnim tjelesima, no taj je zakon za tjelesa l^n-tih kružnih jedinica, ako je $n > 1$, izveden tek za slučaj $l^n = 2^2$, a nedavno sam izveo (isp. moju radnju u 165. knjizi „Rada" str. 1) tako zvani Eisensteinov zakon recipročnosti za tijelo osmih kružnih jedinica. Tako resultati, što su dobiveni u prvim paragrafima ove radnje od § 1. do § 12., valjaju sasvijem općeno, dok se ostali paragrafi oslanjaju na zakon recipročnosti u tjelesima l^n-tih kružnih jedinica, te zasad, dok taj zakon nije općeno dokazan, vrijede tek, ako je $n > 1$, za slučaj, da je l^n jednako 2^2 ili 2^3.

§ 1.

Relativno ciklično tijelo K_n, kojega je stepen potencija prosta broja l.

Neka bude l makar koji prost broj, a n kojigod pozitivan cio racionalan broj. Stavimo

$$\gamma_n = e^{\frac{2\pi i}{l^n}},$$

Digitized by Google

pa neka bude k kojegod imaginarno brojno tijelo nadređeno kružnome tijelu $k(\zeta_n)$, a uz k neka su i sva sa k konjugirana tjelesa imaginarna. Ako nam μ predočuje makar koji cijeli broj u tijelu k, koji nije jednak l-toj potenciji kojega cijeloga broja istoga tijela k, nastat će adjunkcijom veličine $\sqrt[l^n]{\mu}$ k tijelu k s obzirom na k relativno ciklično tijelo $K_n = K(\sqrt[l^n]{\mu}, k)$, kojega je relativni stepen s obzirom na k jednak l^n.

Označimo li sa S supstituciju $(\sqrt[l^n]{\mu} : \zeta_n \sqrt[l^n]{\mu}$, to se sastoji relativna grupa tijela K_n s obzirom na k iz supstitucija

$$1, S, S^2, \ldots, S^{l^n-1},$$

a relativna grupa istoga tijela K_n s obzirom na tijelo

$$K_{n-1} = K(\sqrt[l^{n-1}]{\mu}, k)$$

iz supstitucija

$$1, S^{l^{n-1}}, S^{2l^{n-1}}, \ldots, S^{(l-1)l^{n-1}}.$$

§ 2.

O relativnoj diskriminanti tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Neka bude k kojegod algebarsko brojno tijelo sa svojstvom gore označenim, a μ cio broj u k, koji nije jednak l-toj potenciji cijela broja istoga tijela k. Označit ćemo sa $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ relativnu diskriminantu tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu}, k)$ s obzirom na k; nadalje sa $D_{\sqrt[l]{\mu},\, k}$, $D_{\sqrt[l^2]{\mu},\, \sqrt[l]{\mu}}$, $D_{\sqrt[l^3]{\mu},\, \sqrt[l^2]{\mu}}$, $\ldots$, $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, \sqrt[l^{n-1}]{\mu}}$ po redu relativne diskriminante tijela $K(\sqrt[l]{\mu})$ s obzirom na k, tijela $K(\sqrt[l^2]{\mu})$ s obzirom na $K(\sqrt[l]{\mu})$, tijela $K(\sqrt[l^3]{\mu})$ s obzirom na $K(\sqrt[l^2]{\mu})$, $\ldots$, napokon tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na tijelo $K(\sqrt[l^{n-1}]{\mu})$.

Digitized by Google

Relativna diskriminanta $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$ sadržava samo one proste ideale tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ kao faktore, koji su sadržani bar u jednoj od relativnih diskriminanata $D_{\sqrt{\mu},\,k}$, $D_{\sqrt{\mu},\,\sqrt{\mu}}$, $D_{\sqrt[l^2]{\mu},\,\sqrt{\mu}}$, $D_{\sqrt[l^2]{\mu},\,\sqrt[l^2]{\mu}}$, . . . , $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,\sqrt[l^{n-1}]{\mu}}$. Nadalje je svaki prosti faktor tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, sadržan u kojojgod od tih diskriminanata, sadržan također u svakoj diskriminanti toga niza, koja iza nje dolazi. No ipak je moguće, da diskriminanta, koja u nizu kasnije dolazi, više prostih ideala tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ sadržava nego diskriminante, što stoje pred njom.

O prostim idealima sadržanim u tim relativnim diskriminantama može se pogledati radnja W. Lietzmanna: Zur Theorie der n-ten Potenzreste in algebraischen Zahlkörpern. Mathem. Annalen 60. Bd.

Mi ćemo dokazati o relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$ ovu poučku:

1. poučka. Neka budu μ, μ_1 dva koja mu drago cijela broja tijela k, koji nijesu l-te potencije cijelih brojeva istoga tijela k, pa neka bude prosti ideal $\mathfrak{l}_1$ tijela k sadržan u $1-\zeta_n$ točno u l_1-toj, a u brojevima μ, μ_1 točno u a-toj potenciji. Postoji li tada relacija

$$(1) \qquad \mu \equiv \mu_1, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+a}\right),$$

to su relativne diskriminante $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$, $D_{\sqrt[l^n]{\mu_1},\,k}$ ili zajedno proste prema $\mathfrak{l}_1$ ili zajedno djeljive sa $\mathfrak{l}_1$.

Dokaz. Da to dokažemo, valja samo pokazati, da je uvijek, ako je $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$ prosto prema $\mathfrak{l}_1$, već i $D_{\sqrt[l^n]{\mu_1},\,k}$ prosto prema $\mathfrak{l}_1$.

Uzmimo dakle, da je $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$ prosto prema $\mathfrak{l}_1$. Ako su relativne diskriminante $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$, $D_{\sqrt[l^n]{\mu_1},\,k}$ obje proste prema $\mathfrak{l}_1$, mora biti prema $\mathfrak{l}_1$ prosta također relativna diskriminanta tijela, koje nastane sastavbom tjelesa $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ i $K(\sqrt[l^n]{\mu_1})$, uzeta s obzirom na k. No tijelo, što nastane sastavbom tjelesa $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ i $K(\sqrt[l^n]{\mu_1})$, identično

Digitized by Google

je sa tijelom, što nastane sastavbom tjelesa $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ i $K(\sqrt[l^n]{\mu\mu_1 l^{-1}})$.

Prema tomu nam valja dokazati, da je relativna diskriminanta tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu\mu_1 l^{-1}})$ s obzirom na k prosta prema $\mathfrak{l}_1$.

Ako je u (1) $n = 1$, to izlazi istinitost poučke iz teorije ostataka l-tih potencija. Stoga se možemo pri dokazivanju te poučke za makar kakav n poslužiti potpunom indukcijom.

Uzmimo, da je poučka već dokazana za $n = s-1$, pak ćemo tada pokazati, da ona valja i za $n = s$, ako valja kongruencija (1).

Neka bude relativna diskriminanta $D_{\sqrt{\mu}, k}\, l^{s-1}$ prosta prema $\mathfrak{l}_1$. Dokazat ćemo, da je onda uvijek i $D_{\sqrt{\mu_1}, k}\, l^s$ prosto prema $\mathfrak{l}_1$. Budući da su relativne diskriminante $D_{\sqrt{\mu}, k}\, l^{s-1}$ i $D_{\sqrt{\mu_1}, k}\, l^{s-1}$ proste prema $\mathfrak{l}_1$, mora biti prema $\mathfrak{l}_1$ prosta i relativna diskriminanta tijela, koje nastane sastavbom tjelesa $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu})$ i $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu_1})$, uzeta s obzirom na k, ili — što je isto — sastavbom tjelesa $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu})$ i $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1 l^{-1}})$. Označimo li sa $\mathfrak{L}$ prost ideal tijela $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1 l^{-1}})$ sadržan u $\mathfrak{l}_1$, dat će se poradi toga naći cio broj $\varkappa$ u tijelu $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1 l^{-1}})$, tako da bude

$$(2) \qquad \sqrt[l^{s-2}]{\mu_1} \equiv \varkappa^l , \qquad \left(\mathfrak{L}^{ll_1} + \frac{a}{l^{s-2}} \right).$$

No poradi (1) u našem je slučaju

$$\mu\mu_1{}^{l-1} \equiv \mu_1{}^l , \qquad \left(\mathfrak{l}_1{}^{l_1[sl^s - (s-1)l^{s-1}]+la} \right),$$

a odavle izvodimo, da je

$$\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1{}^{l-1}} \equiv \xi \sqrt[l^{s-2}]{\mu_1} , \qquad \left(\mathfrak{L}^{ll_1} + \frac{a}{l^{s-2}} \right),$$

gdjeno je ξ l^{s-1}-ti korijen jedinice. Budući da je ξ svakako l-ta potencija broja u k, možemo zadnju kongruenciju napisati ovako:

Digitized by Google

$$\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1^{l-1}} \equiv \overline{\beta}^{l}, \cdot \left(\varrho^{ll_1} + \frac{a}{l^{s-2}} \right),$$

gdje nam je $\overline{\beta}$ cio broj tijela $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1^{l-1}})$. Dakle je relativna diskriminanta tijela $K(\sqrt[l^{s}]{\mu\mu_1^{l-1}})$ s obzirom na tijelo $K(\sqrt[l^{s-1}]{\mu\mu_1^{l-1}})$ prosta prema l_1, a tim je 1. poučka dokazana.

Još ćemo ovdje da dokažemo ovu poučku:

2. poučka. Ako su μ, μ_1 dva kojagod cijela broja tijela k, koji nijesu l-te potencije cijelih brojeva istoga tijela k, pak ako su relativne diskriminante $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ i $D_{\sqrt[l^n]{\mu_1},\, k}$ proste prema kojem mu drago prostom idealu $\mathfrak{p}$ tijela k, to je i relativna diskriminanta $D_{\sqrt[l^n]{\mu\mu_1},\, k}$ prosta prema $\mathfrak{p}$.

Dokaz. Poradi pretpostavke o relativnim diskriminantama $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$, $D_{\sqrt[l^n]{\mu_1},\, k}$ mora i relativna diskriminanta tijela K_1, koje nastane sastavbom tjelesa $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ i $K(\sqrt[l^n]{\mu_1})$, uzeta s obzirom na k, biti prosta prema $\mathfrak{p}$. Obazremo li se sada na to, da je tijelo $K(\sqrt[l^n]{\mu\mu_1})$ sadržano u tijelu K_1, uvidjet ćemo smjesta, da je 2. poučka ispravna.

§ 3.

O normnim ostacima tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

O Legendre-ovu simbolu u tijelu k valja vidjeti Lietzmannovu radnju u Mathem. Annalen Bd. 60.

Ako je α cio broj u k, a $\mathfrak{a}$ ideal u k prost prema α, označit ćemo u ovoj radnji svagda sa

$$\left(\frac{\alpha}{\mathfrak{a}}\right)_n$$

Legendre-Jacobijev simbol za ostatke potencija l^n-toga stepena u tijelu k.

Digitized by Google

Definicija. Ako su ν i μ dva koja mu drago cijela broja u k, a $\mathfrak{p}$ prost ideal u k, koji nije sadržan u l, pa ako je $\mathfrak{p}$ sadržan u μ točno u a-toj, u ν točno u b-toj potenciji, prikazat ćemo razlomak $\frac{\nu^a}{\mu^b}$ u obliku $\frac{\rho}{\sigma}$, gdjeno su ρ, σ cijeli brojevi u k prosti prema $\mathfrak{p}$, i definirati simbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n$ jednadžbom

$$(1) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{ab\left(\frac{l-1}{2}\right)} \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1}.$$

Tim je simbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n$ jednoznačno definiran kao l^n-ti korijen jedinice. Za nj valja poučka:

3. poučka. Ako su μ, ν, μ_1, ν_1, μ^*, ν^*, α, β, γ, δ cijeli brojevi u k, a $\mathfrak{p}$ prost ideal u k, koji nije sadržan u l, to je

$$(2) \qquad \left(\frac{\mu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1,$$

$$(3) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1,$$

$$(4) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n,$$

$$(5) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu, \mu\mu_1}{\mathfrak{p}}\right)_n,$$

$$(6) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu^*, \mu^*}{\mathfrak{p}}\right)_n, \text{ ako je } \frac{\nu}{\nu^*} = \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{l^n}, \quad \frac{\mu}{\mu^*} = \left(\frac{\gamma}{\delta}\right)^{l^n}.$$

Dokaz[1]. Ispravnost jednadžbe (2) i (3) izlazi neposredno iz definicije simbola. Da dokažemo (4), uzet ćemo, da je $\mathfrak{p}$ sadržan

[1] Taj se dokaz prislanja posve na analogni dokaz u teoriji ostataka l-tih potencija (isporedi D. Hilbert: Theorie des relativquadratischen Zahlkörpers; Mathem. Annalen Bd. 51 [citira se sa H. Rq. Z.]; Ph. Furtwängler: Ueber das Reciprocitätsgesetz der l-ten Potenzreste itd.; Abh. der kön. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1902 [citira se sa F.].)

Digitized by Google

u μ točno u a-toj, u ν točno u b-toj, a u ν_1 točno u b_1-toj potenciji, pa neka bude

$$\frac{\nu^a}{\mu^a} = \frac{\rho}{\sigma}, \quad \frac{\nu_1{}^a}{\mu^{b_1}} = \frac{\rho_1}{\sigma_1}, \quad \frac{(\nu\nu_1)^a}{\mu^{b+b_1}} = \frac{\rho\rho_1}{\sigma\sigma_1},$$

gdjeno su ρ, σ, ρ_1, σ_1, a prema tomu i $\rho\rho_1$, $\sigma\sigma_1$ prosti prema $\mathfrak{p}$.

Tada je

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{a(b+b_1)(l-1)} \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\sigma}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1} \left(\frac{\rho_1}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1}$$

$$= \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{a(b+b_1)(l-1)} \left(\frac{\rho\rho_1}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\sigma\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1}.$$

No budući da je

$$\left(\frac{\nu\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{-1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{a(b+b_1)(l-1)} \left(\frac{\rho\rho_1}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\sigma\sigma_1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1},$$

vidimo, da je jednadžba (4) ispravna. Jednadžba se (5) dobije sada lako s pomoću (3).

Da se uvjerimo o ispravnosti relacije (6), treba se samo obazreti na to, da je

$$\left(\frac{\nu, \alpha^{l^n}}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu, \alpha}{\mathfrak{p}}\right)_n^{l^n} = 1,$$

a poradi toga

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu, \mu\alpha^{l^n}}{\mathfrak{p}}\right)_n.$$

Simbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n$ dovest ćemo u svezu s pojmom l^n-toga normnoga ostatka.

Definicija. Ako su nam ν i μ dva cijela broja tijela k, a μ nije jednak l^n-toj potenciji cijela broja istoga tijela k, pak ako nam $\mathfrak{w}$ naznačuje makar koji prost ideal u k, nazvat ćemo ν normnim ostatkom tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{w}$, ako

Digitized by Google

je ν kongruentan relativnoj normi $N \underset{\sqrt[l^n]{\mu},\ k}{}$ cijela broja u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na svaku potenciju ideala $\mathfrak{w}$. U svakom ćemo drugom slučaju zvati ν normnim neostatkom tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{w}$.

U slučaju pak, da je μ l^n-ta potencija cijela broja u k, zvat ćemo ν uvijek normnim ostatkom tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{w}$.

Valja poučka:

4. poučka. Neka budu ν, μ dva cijela broja u k, a μ neka ne bude kvadrat cijeloga broja u k. Nadalje neka bude $\mathfrak{p}$ prost ideal u k, koji nije sadržan u l, i neka bude taj prosti ideal $\mathfrak{p}$ sadržan u broju ν točno u b-toj potenciji. Onda je nuždan i dovoljan uvjet za to, da bude ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$, da postoji u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ cio broj A, za koji valja kongruencija

$$\nu \equiv N \underset{\sqrt[l^n]{\mu},\ k}{} (\mathrm{A}),\ (\mathfrak{p}^{b+1}).$$

Ako je pak $\mathfrak{l}_1$ prost ideal tijela k sadržan kao faktor u $1-\zeta_n$ točno u l_1-toj potenciji i ako je $\mathfrak{l}_1$ u ν sadržan točno u b-toj potenciji, nužno je, a i dovoljno, da bude ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_1$, da postoji kongruencija od oblika

$$\nu \equiv N \underset{\sqrt[l^n]{\mu},\ k}{} (\mathrm{A}),\ \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+b+1}\right),$$

gdje je A cio broj u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Dokaz je sličan dokazu za analogni slučaj teorije l-tih normnih ostataka.

Tom ćemo se poučkom poslužiti pri dokazivanju ove važne poučke:

Digitized by Google

5. poučka. Ako su ν, μ dva cijela broja, a $\mathfrak{p}$ prost ideal u k, koji nije sadržan u l, to je ν onda i samo onda normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$, ako je

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1.$$

Dokaz. Ta je poučka za slučaj $n = 1$ u teoriji ostataka l-tih potencija već dokazana. Ako je pak μ l^s-ta, $(s \neq 0)$, potencija, ali ne više l^{s+1}-ta potencija cijela broja u k, svodi se dokaz potpunom indukcijom na teoriju l^{n-s}-tih ostataka.

Ako je naime $\mu = \mu_1^{l^s}$, lako se uvjerimo na temelju jednadžbe (5), da je

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu, \mu_1}{\mathfrak{p}}\right)_{n-s}.$$

Po definiciji je u tom slučaju ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, ako je on normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^{n-s}]{\mu_1})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$, a tim je svedeno za taj slučaj istraživanje normnih ostataka tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ na istraživanje normnih ostataka tijela $K(\sqrt[l^{n-s}]{\mu_1})$.

Na temelju ispravnosti 5. poučke za slučaj, da je $n = 1$, možemo lako pokazati, da je ta poučka valjana, ako je $n = 2$, a μ l-ta potencija cijela broja u k, i tada onako, kako ćemo u ovom paragrafu razložiti, dokazati, da ona valja i onda još, ako μ nije l-ta potencija cijela broja u k. Kako je pak to dokazano, možemo prijeći k istraživanju slučaja $n = 3$ i t. d.

Ako je napose μ l^n-ta potencija cijela broja u k, razabira se ispravnost naše poučke već iz definicije normnoga ostatka i simbola $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n$.

U slučaju, da je ν jednak l^s-toj, ali ne više l^{s+1}-toj potenciji cijela broja u k, opet se svodi dokaz na teoriju ostataka l^{n-s}-tih potencija. Stavimo li naime $\nu = \nu_1^{l^s}$, valja jednadžba

Digitized by Google

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu_1, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_{n-s}.$$

Prema tomu smijemo dakle pri daljem dokazivanju uzeti, da ν i μ nijesu l-te potencije cijelih brojeva u k.

Prvi slučaj. ν i μ oba su prosta prema $\mathfrak{p}$.

Tada je po definiciji

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1.$$

Treba dakle dokazati, da je u tom slučaju ν uvijek normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$.

Za $n = 1$ dokazana je ta tvrdnja u teoriji ostataka l-tih potencija. Ako je nadalje $n = 2$ i ako stavimo

$$\nu \equiv N \underset{\sqrt{\mu}, k}{l} (A_1), \quad (\mathfrak{p}), \tag{7}$$

moći ćemo naći cio broj A_2 u $K(\sqrt[l^2]{\mu})$ tako, da bude

$$A_1 \equiv N \underset{\sqrt{\mu}, \sqrt{\mu}}{l^2 \quad l} (A_2), \quad (\mathfrak{p}). \tag{8}$$

Zaista ako je $\mathfrak{p}_1$ koji mu drago prost ideal tijela $K(\sqrt[l]{\mu})$ sadržan u $\mathfrak{p}$, a $\mathfrak{p}_1', \mathfrak{p}_1'', \ldots, \mathfrak{p}_1^{(a)}$ sa $\mathfrak{p}_1$ s obzirom na k relativno konjugirani i među sobom različiti prosti ideali tijela $K(\sqrt[l]{\mu})$, moći ćemo uvijek naći u tijelu $K(\sqrt[l^2]{\mu})$ cijele brojeve $B_2, B_2', \ldots, B_2^{(a)}$ tako, da bude

$$A_1 \equiv N \underset{\sqrt{\mu}, k}{l} \quad (B_2), \quad (\mathfrak{p}_1),$$

$$A_1 \equiv N \underset{\sqrt{\mu}, k}{l} \quad (B_2'), \quad (\mathfrak{p}_1'),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$A_1 \equiv N \underset{\sqrt{\mu}, k}{l} \quad (B_2^{(a)}), \quad (\mathfrak{p}_1^{(a)}).$$

Digitized by Google

Odredimo li sada cijeli broj A_2 u $K(\sqrt[l^2]{\mu})$ prema kongruencijama

$$\begin{aligned} &A_2 \equiv B_2, && (\mathfrak{p}_1),\\ &A_2 \equiv B_2', && (\mathfrak{p}_1'),\\ &\text{— — — — —} \\ &A_2 \equiv B_2^{(a)}, && (\mathfrak{p}_1^{(a)}), \end{aligned}$$

valjat će za A_1, A_2 kongruencija (8). Kongruencije (7) i (8) pružaju zajedno dokaz 5. poučke za taj slučaj.

Taj postupak možemo nastaviti.

Uzmimo, da smo već dokazali, da u tijelu $K(\sqrt[l^{n-1}]{\mu})$ ima broj A_{n-1}, za koji je

$$(9) \qquad v \equiv N_{\sqrt[l^{n-1}]{\mu},\, k} \quad (A_{n-1}), \quad (\mathfrak{p}).$$

Onda će se moći naći u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ cio broj A_n tako, da bude

$$(10) \qquad A_{n-1} \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\ \sqrt[l^{n-1}]{\mu}} \ (A_n), \quad (\mathfrak{p}).$$

Zaista ako je $\mathfrak{p}_{n-1}$ koji mu drago prost ideal tijela $K(\sqrt[l^{n-1}]{\mu})$ sadržan u $\mathfrak{p}$, a $\mathfrak{p}_{n-1}', \mathfrak{p}_{n-1}'', \ldots, \mathfrak{p}_{n-1}^{(a)}$ sa $\mathfrak{p}_{n-1}$ s obzirom na k relativno konjugirani i među sobom različiti prosti ideali tijela $K(\sqrt[l^{n-1}]{\mu})$, moći ćemo uvijek naći u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ cijele brojeve $B_n, B_n', \ldots, B_n^{(a)}$ tako, da bude

$$\begin{aligned} &A_{n-1} \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\ \sqrt[l^{n-1}]{\mu}} \ (B_n), && (\mathfrak{p}_{n-1}),\\ &A_{n-1} \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\ \sqrt[l^{n-1}]{\mu}} \ (B_n'), && (\mathfrak{p}_{n-1}'),\\ &\text{— — — — — — — — — —} \\ &A_{n-1} \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\ \sqrt[l^{n-1}]{\mu}} \ (B_n^{(a)}), && (\mathfrak{p}_{n-1}^{(a)}). \end{aligned}$$

Digitized by Google

Odredimo li sada cijeli broj A_n u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ prema kongruencijama

$$A_n \equiv B_n , \quad (\mathfrak{p}_{n-1}) ,$$
$$A_n \equiv B_n' , \quad (\mathfrak{p}_{n-1}') ,$$
$$\text{— — — — — —}$$
$$A_n \equiv B_n^{(a)} , \quad (\mathfrak{p}_{n-1}^{(a)}) ,$$

valjat će za A_{n-1}, A_n kongruencija (10). Kongruencije (9) i (10) daju dokaz 5. poučke za naš prvi slučaj uopće.

Drugi slučaj. μ je djeljiv točno a-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{r}$, a ν je prost prema $\mathfrak{p}$.

Po definiciji je tada

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)_n^a .$$

Uzmimo, da je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$. Tada ćemo moći naći u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ cio broj A_n tako, da bude

$$\nu \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}(A_n) , \quad (\mathfrak{p}). \tag{11}$$

Ako je a djeljiv točno s-tom potencijom broja l, pak ako označimo sa $\mathfrak{p}^{(n)}$ prost ideal tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ sadržan u $\mathfrak{p}$, moći ćemo naći u tijelu $K(\sqrt[l^s]{\mu})$ cio broj A_s tako, da bude

$$A_n \equiv A_s , \quad (\mathfrak{p}^{(n)}).$$

Obazremo li se na to, moći ćemo kongruenciju (11) napisati u obliku

$$\nu \equiv \left[N_{\sqrt[l^s]{\mu},\, k}(A_s) \right]^{l^{n-s}} , \quad (\mathfrak{p}) ;$$

Digitized by Google

dakle je doista

$$\left(\frac{\nu}{\mathfrak{p}}\right)_n^a = +1. \tag{12}$$

Ako pak postoji jednadžba (12), moći ćemo naći u k cio broj α tako, da bude

$$\nu \equiv \alpha^{l^{n-s}}, \quad (\mathfrak{p}). \tag{13}$$

Budući da je a djeljivo točno sa l^s, dat će se naći cio broj μ^* u k prost prema $\mathfrak{p}$ tako, da bude $K(\sqrt[l^s]{\mu}) = K(\sqrt[l^s]{\mu^*})$. Stoga je prema već dokazanom prvom slučaju α normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^s]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$. Moći ćemo uvijek odrediti cio broj A_s u $K(\sqrt[l^s]{\mu})$ tako, da bude

$$\alpha \equiv N_{\mathrm{V}\mu,\, k}^{l^s}(A_s), \quad (\mathfrak{p}).$$

Uvrstimo li to u (13), dobit ćemo, da je

$$\nu \equiv N_{\mathrm{V}\mu,\, k}^{l^n}(A_s), \quad (\mathfrak{p}),$$

kako je trebalo dokazati.

Treći slučaj. μ je prost prema $\mathfrak{p}$, a ν djeljiv točno b-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$.

Po definiciji je u tom slučaju

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-b}.$$

Ako je b djeljiv sa l^n, lako se uvjerimo, da je tada uvijek ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na k. Stoga ćemo uzeti, da je b djeljiv točno sa l^s, gdjeno je $s < n$.

Digitized by Google

Uzmimo, da je $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-b} = +1$ ili, što je isto, da je

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{n-s} = +1.$$

Tada se raspada $\mathfrak{p}$ u tijelu $K(\sqrt[l^{n-s}]{\mu})$ u l^{n-s} među sobom različitih prostih ideala. Označimo jedan od njih sa $\mathfrak{P}$, pa neka bude Π broj u $K(\sqrt[l^{n-s}]{\mu})$ točno djeljiv prvom potencijom ideala $\mathfrak{P}$, a prost prema idealima relativno konjugiranim sa $\mathfrak{P}$ u $K(\sqrt[l^{n-s}]{\mu})$. Tada je

$$\pi = N_{\sqrt[l^{n-s}]{\mu},\, k}\,(\Pi)$$

broj u k točno djeljiv prvom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$. Neka bude nadalje ρ prema $\mathfrak{p}$ prost cio broj u k, koji je djeljiv sa $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$, onda je $\nu^* = \frac{\nu}{\pi^b}\,\rho^{bl^n}$ cio broj u k prost prema $\mathfrak{p}$, te stoga mora da bude

$$\left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1.$$

Moći ćemo dakle naći u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ cio broj A_n tako, da bude

$$\nu^* \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}\,(A_n)\,, \quad (\mathfrak{p}).$$

Odredimo li sada cio broj ρ^* prema kongruenciji

$$\rho\rho^* \equiv 1\,, \quad (\mathfrak{p}^{b+1})\,,$$

dobit ćemo relaciju

$$\nu \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}\left(\rho^{*\,b}\,\Pi^{\frac{b}{l^s}}\,A_n\right), \quad (\mathfrak{p}^{b+1})\,,$$

a to znači, da je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$.

Digitized by Google

Uzmimo sada obrnuto, da je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$. Pokazat ćemo, da tada mora biti $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-b} = +1$.

Po pretpostavci ima u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ cio broj A_n tako, da je

$$\nu \equiv N_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}(A_n), \quad (\mathfrak{p}^{b+1}). \tag{14}$$

U našem je slučaju relativna diskriminanta $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ prosta prema $\mathfrak{p}$. Kada bi bilo $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-b} \neq 1$ ili, što je isto, $\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{n-s} \neq 1$, morala bi norma $N_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}(A_n)$ biti djeljiva najmanje l^{s+1}-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$, a to je protivno kongruenciji (14). Tim je 5. poučka i za treći slučaj dokazana.

Četvrti slučaj. μ je djeljiv točno a-tom, a ν točno b-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$.

Ako je koji od brojeva a, b djeljiv sa l^n, lako se dokaže ispravnost poučke, pak ćemo stoga uzeti, da nijedan od tih brojeva nije djeljiv sa l^n.

Neka bude a djeljiv točno sa l^s, a b točno sa l^t, pa neka bude ponajprije $t \geqq s$. Tada ćemo moći odrediti dva cijela racionalna broja c, d tako, da bude

$$b + ac = dl^n.$$

Ako je sada π cio broj u k točno djeljiv prvom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$, a ρ cio broj u k djeljiv sa $\frac{\pi}{\mathfrak{p}}$, ali prost prema $\mathfrak{p}$, to je $\nu^* = \nu(-1)^{c(l-1)}\,\mu^c\left(\frac{\rho}{\pi}\right)^{dl^n}$ cio broj u k prost prema $\mathfrak{p}$. Prema (2) do (6) mora biti

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu^*,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n.$$

Uzmemo li, da je prvi od tih simbola jednak 1, mora i drugi biti jednak 1. Dakle je tada

Digitized by Google

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu^*,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1.$$

No budući da je ν^* prost prema $\mathfrak{p}$, mora po onome, što je već dokazano, taj broj ν^* biti normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$, no sa ν^* je uvijek i ν takav normni ostatak. Obrat se dokazuje slično.

Uzmimo nadalje, da je $t < s$, te stavimo

$$a = l^s a_1, \quad b = l^t b_1.$$

Ako je tada

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1, \tag{14}$$

dokazat ćemo, da ν mora biti l^n-ti normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$.

Poradi (14) valja jednadžba

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{p}}\right)_s = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{s-t} = +1. \tag{15}$$

Ako nam je $\mathfrak{P}$ prost ideal tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ sadržan u $\mathfrak{p}$, a Π^* cio broj istoga tijela, koji je djeljiv točno prvom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{P}$, ali nije djeljiv prostim idealima tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ konjugiranima sa $\mathfrak{P}$, to će biti poradi (15) broj

$$\pi^* = N \underset{\sqrt{\mu},\, k}{l^n} \quad (\Pi^*)$$

djeljiv točno l^w-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$, gdje je $w \leqq t$. Moći ćemo dakle odrediti prikladan eksponenat e tako, da broj $\pi = \pi^{*e}$ bude točno djeljiv sa $\mathfrak{p}^{lt}$. Stavimo li još $\Pi^{*e} = \Pi$, valjat će jednadžba

$$\pi = N \underset{\sqrt{\mu},\, k}{l^n} \quad (\Pi). \tag{16}$$

Digitized by Google

Prema tomu je $\pi^{a_1} l^{s-t}$ djeljivo točno a-tom, a π^{b_1} točno b-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{p}$. Ako sada označimo sa ϱ cio broj u k, koji je djeljiv sa $\frac{\pi}{\mathfrak{p} l^t}$, a uz to je prost prema $\mathfrak{p}$. to su brojevi

$$(17) \qquad \nu^* = \frac{\nu}{\pi^{b_1}} \cdot \varrho^{b_1} l^n, \quad \mu^* = \frac{\mu}{\pi^{a_1} l^{s-t}} \cdot \varrho^{a_1} l^n$$

cijeli brojevi u k prosti prema $\mathfrak{p}$.

Tijelo je $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ identično s tijelom $K\left(\sqrt[l^n]{\pi^{a_1} l^{s-t} \mu^*}\right)$. Pokazat ćemo, da je

$$(18) \qquad \left(\frac{\pi^{b_1}, \pi^{a_1} l^{s-t} \mu^*}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\mu^*}{\mathfrak{p}}\right)_{n-t}^{-b_1} = +1.$$

Poradi (16) mora biti π^{b_1} svakako relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\mu},\ \sqrt[l^{s-t}]{\mu}}$ cijela broja u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Stoga mora da bude prema onome, što je već prije dokazano,

$$(19) \qquad \left(\frac{\pi^{b_1}, \pi^{a_1} \sqrt[l^{s-t}]{\mu^*}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{n-s+t} = +1,$$

ako je $\bar{\mathfrak{p}}$ prost ideal tijela $K(\sqrt[l^{s-t}]{\mu^*})$ sadržan u π. Iz (19) izvodimo dalje, da je

$$\left(\frac{\sqrt[l^{s-t}]{\mu^*}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{n-s} = +1.$$

Postoji dakle u tijelu $K(\sqrt[l^s]{\mu^*})$ cio broj A tako, da je

$$\sqrt[l^{s-t}]{\mu^*} \equiv A^{l^{n-s}}, \quad (\bar{\mathfrak{p}}).$$

Digitized by Google

No poradi (15) A je kongruentan cijelomu broju α tijela k s obzirom na $\bar{\mathfrak{p}}$, tako te možemo napisati, da je

$$\sqrt[l^{s-t}]{\mu^*} \equiv \alpha^{l^{n-s}}, \quad (\bar{\mathfrak{p}}),$$

a odavle izlazi kongruencija

$$\mu^* \equiv \alpha^{l^{n-t}}, \quad (\mathfrak{p}),$$

i tim je dokazana ispravnost relacije (18).

Obazremo li se na tu relaciju, moći ćemo (14) napisati ovako:

$$(20) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu^*, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\nu^*}{\mathfrak{p}}\right)^{a_1}_{n-s} = +1.$$

Budući pak da je ν^* prost broj prema $\mathfrak{p}$, mora poradi te relacije da bude ν^* normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$. No sa ν^* je i ν takav normni ostatak. Tim je gornja tvrdnja dokazana.

Obrat se sada dade lako dokazati. Ako je

$$\nu \equiv N \underset{\nabla\mu, k}{\sqrt[l^n]{}} (\mathrm{A}), \quad (\mathfrak{p}^e),$$

gdje je A cio broj u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, a e dovoljno velik, inače koji mu drago, eksponenat, mora ν biti sigurno također normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^s]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$. No tada je

$$(21) \qquad \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_s = \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_{s-t} = +1,$$

pak se može na temelju toga dokazati, da postoji broj π gore razvijenoga svojstva, za koji valja jednadžba (18). Kako je to dokazano, odredit ćemo broj ν^* prema (17). Sa ν je i broj ν^* normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$, pa stoga mora vrije-

Digitized by Google

diti jednadžba (20). Jednadžbe (18) i (20) pružaju dokaz obrata gornje tvrdnje.

Tim je 5. poučka potpuno dokazana.

§ 4.

Relativne temeljne jedinice tijela K_n s obzirom na tijelo k.

Neka bude stepen tijela k jednak $2m$. Tada je u tijelu k broj temeljnih jedinica jednak $m-1$.

Definirat ću sustav relativnih temeljnih jedinica tijela $K_n = K(\sqrt[l^n]{\mu}, k)$ s obzirom na k ovako:

Definicija: Sustav jedinica

$$H_{n,1}, \ldots, H_{n,m},$$

tijela K_n neka se zove sustavom relativnih temeljnih jedinica tijela K_n s obzirom na tijelo k, ako jedinica od oblika

$$H_{n,1}^{F_1(S)} \ldots H_{n,m}^{F_m(S)} [E_{n-1}]$$

samo tako može da bude simbolična $(1-S)$-ta potencija jedinice tijela K_n, ako su cijeli algebarski brojevi $F_1(\zeta_n), \ldots, F_m(\zeta_n)$ djeljivi sa $1-\zeta_n$. Tu su $F_1(S), \ldots, F_m(S)$ cijele racionalne funkcije stepena $(l-1)l^{n-1}-1$ sa cijelim racionalnim koeficijentima, a $[E_{n-1}]$ označuje jedinicu tijela K_{n-1} ili takovu jedinicu u K_n, kojoj je l-ta potencija jedinica u K_{n-1}.

Dokazat ćemo ovu poučku:

6. poučka. U relativno cikličnom tijelu K_n ima uvijek sustav od m relativnih temeljnih jedinica s obzirom na tijelo k.

Dokaz. Neka bude

$$E_{n-1,1}, \ldots, E_{n-1,l^{n-1}m-1}$$

Digitized by Google

sustav temeljnih jedinica tijela K_{n-1}, a $E_{n,1}$ takova jedinica u K_n, da i jedinice

$$E_{n,1}, E_{n-1,1}, \ldots, E_{n-1,l^{n-1}m-1}$$

čine sustav neovisnih jedinica; tada moraju i jedinice

$$E_{n,1}, E_{n,1}^{S}, E_{n,1}^{S^2}, \ldots, E_{n,1}^{S^{(l-1)l^{n-1}-1}}, E_{n-1,1}, \ldots, E_{n-1,l^{n-1}m-1}$$

biti među sobom neovisne.

Uzmimo, da nijesu, pak da je

$$E_{n,1}^{F(S)} = E_{n-1}, \tag{1}$$

gdje je $F(S)$ cijela racionalna funkcija stepena $(l-1)l^{n-1}-1$ u S-u sa cijelim racionalnim koeficijentima, koja nije identično jednaka 0, a E_{n-1} predočuje jedinicu u K_{n-1}. Budući da je funkcija

$$1+S^{l^{n-1}}+S^{2l^{n-1}}+\ldots+S^{(l-1)l^{n-1}}$$

ireduktivna, moći ćemo odrediti dvije cijele racionalne funkcije $G_1(S)$, $G_2(S)$ sa cijelim racionalnim koeficijentima i cio racionalan broj a različit od 0 tako, da bude

$$F(S)G_1(S)+(1+S^{l^{n-1}}+S^{2l^{n-1}}+\ldots+S^{(l-1)l^{n-1}})G_2(S)=a.$$

Obazremo li se sada na to, da je

$$E_{n,1}^{1+S^{l^{n-1}}+S^{2l^{n-1}}+\ldots+S^{(l-1)l^{n-1}}}$$

jedinica u K_{n-1}, dobit ćemo iz (1), ako tu jednadžbu potenciramo simbolično sa $G_1(S)$, da je

$$E_{n,1}^{a} = E_{n-1}^{*},$$

Digitized by Google

gdje je E^{*}_{n-1} jedinica u K_{n-1}, no to se protivi pretpostavci o jedinici $E_{n,1}$.

Uzmimo nadalje, da je $E_{n\,2}$ takova jedinica u K_n, da nam i jedinice

$$E_{n,2},\ E_{n,1},\ E^{S}_{n,1},\ldots,\ E_{n,1}{}^{S^{(l-1)l^{n-1}-1}},\ E_{n-1,1},\ldots,\ E_{n-1,\,l^{n-1}m-1}$$

čine sustav neovisnih jedinica, to ćemo lako, kao i prije, pokazati, da su i jedinice

$$E_{n,2},\ E^{S}_{n,2},\ E^{S^2}_{n,2},\ \ldots,\ E^{S^{(l-1)l^{n-1}-1}}_{n,2},$$

$$E_{n,1},\ E^{S}_{n,1},\ E^{S^2}_{n\,1},\ \ldots,\ E^{S^{(l-1)l^{n-1}-1}}_{n,1},$$

$$E_{n-1,1},\ E_{n-1,2},\ \ldots,\ E_{n\ \ 1,\,l^{n-1}m-1}$$

između sebe neovisne.

Nastavimo i dalje taj postupak. Tada ćemo tako moći odrediti m jedinica

$$E_{n,\,1},\ \ldots,\ E_{n,\,m},$$

da jedinice sustava

$$E_{n,\,s},\ E^{S}_{n,\,s},\ E^{S^2}_{n,\,s},\ \ldots,\ E^{S^{(l-1)l^{n-1}-1}}_{n,\,s},$$

$$E_{n-1,1},\ E_{n-1,2},\ \ldots,\ E_{n-1,\,l^{n-1}m-1},$$

$$(s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m).$$

budu između sebe neovisne. U tom sustavu ima svega $l^n m-1$ jedinica, a isto tolik je i broj temeljnih jedinica tijela K_n. Na temelju toga možemo kao i Hilbert[1] dokazati, da se uvijek dade odrediti potencija l^a broja l tako, da izraz od oblika

[1] *D. Hilbert:* Bericht über die „Theorie der algebraischen Zahlkörper" § 55, str. 274 (Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung Bd. IV) (citirane H. A. Z.).

Digitized by Google

$$(2) \qquad \mathrm{E}_{n,1}^{F_1(S)} \dots \mathrm{E}_{n,m}^{F_m(S)} \left[\mathrm{E}_{n-1} \right],$$

gdjeno su $F_1(S), \dots, F_m(S)$ cijele racionalne funkcije stepena $(l-1)l^{n-1}-1$ sa cijelim racionalnim koeficijentima, ne može da bude drukčije l^a-ta potencija jedinice u K_n, nego samo tako, da su svi koeficijenti funkcija $F_1, \dots, F_m$ djeljivi sa l. Isto tako možemo pokazati, da izraz (2) ne može da bude $(1-S)^{la}$-ta simbolična potencija jedinice u K_n, osim ako su cijeli algebarski brojevi $F_1(\zeta_n), \dots, F_m(\zeta_n)$ svi djeljivi sa $1-\zeta_n$.

Dokazavši to odredit ćemo prema Hilbertu sustav jedinica $\mathrm{H}_{n,1}, \dots, \mathrm{H}_{n,m}$ u K_n, ovako: Neka bude e_1 najveći cijeli racionalni broj $\geqq 0$ takove vrste, da je izraz od oblika (2) simbolična $(1-S)^{e_1}$-ta potencija jedinice u K_n, makar da nijesu svi brojevi $F_1(\zeta_n), \dots, F_m(\zeta_n)$ djeljivi sa $1-\zeta_n$; pak neka je

$$\mathrm{E}_{n,1}^{F_1(S)} \dots \mathrm{E}_{n,m}^{F_m(S)} \left[\mathrm{E}_{n-1} \right] = \mathrm{H}_{n,1}^{(1-S)^{e_1}}$$

i tu neka n. pr. $F_1(\zeta_n)$ nije djeljivo sa $1-\zeta_n$. Na sličan ćemo način odrediti i dalje jedinice $\mathrm{H}_{n,2}, \dots, \mathrm{H}_{n,m}$ (Isporedi o tom H. A. Z. § 55.).

Tako određene jedinice $\mathrm{H}_{n,1}, \dots, \mathrm{H}_{n,m}$ čine sustav relativnih temeljnih jedinica tijela K_n. O tom se lako uvjerimo kao i Hilbert (H. A. Z. § 55), samo treba da se obazremo na to, da je

$$\mathrm{H}_{n,s}^{F_s(S)},$$

ako je $F_s(\zeta_n)$ djeljivo sa $1-\zeta_n$, produkt simbolične $(1-S)$-te potencije jedinice u K_n sa jedinicom tijela K_{n-1}.

S pomoću netom određenih relativnih temeljnih jedinica $\mathrm{H}_{n,1}, \dots, \mathrm{H}_{n,m}$ možemo dokazati ovu poučku:

*

Digitized by Google

7. poučka. Ako nam $H_{n,1}, \ldots, H_{n,m}$ nadaje sustav relativnih temeljnih jedinica tijela K_n s obzirom na k, to postoji za svaku jedinicu E_n tijela K_n jednadžba od oblika

$$(3) \qquad E_n^f = H_{n,1}^{F_1(S)} \ldots H_{n,m}^{F_m(S)} \left[E_{n-1} \right],$$

gdje je f cio racionalan broj prost prema l; $F_1(S), \ldots, F_m(S)$ naznačuju cijele racionalne funkcije stepena $(l-1)l^{n-1}-1$ sa cijelim racionalnim koeficijentima, a $[E_{n-1}]$ predočuje jedinicu u K_{n-1} ili takovu jedinicu tijela K_n, kojoj l-ta potencija u K_{n-1} leži.

Dokaz se toj poučki prislanja posve na dokaz u H. A. Z. § 146; stoga ga ne ćemo ovdje napose razviti.

U tijelu K_n ima samo onda jedinica, koja ne leži u K_{n-1}, ali joj l-ta potencija u K_{n-1} leži, ako je $\sqrt[l^{n-1}]{\mu}$ od oblika

$$(4) \qquad \sqrt[l^{n-1}]{\mu} = \Xi_{n-1} \, A_{n-1}^{l},$$

gdje je Ξ_{n-1} jedinica, a A_{n-1} cio broj u K_{n-1}. U tom je slučaju $[E_{n-1}]$ od oblika

$$\left[E_{n-1} \right] = H_{n-1} \left(\sqrt[l]{\Xi} \right)^{e}.$$

gdjeno je H_{n-1} jedinica u K_{n-1}, a eksponenat e ima koju od vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l-1$.

Prema tomu će jednadžba (3) imati u slučaju, da $\sqrt[l^{n-1}]{\mu}$ nije od oblika (4), ovaj oblik:

$$(5) \qquad E_n^f = H_{n,1}^{F_1(S)} \ldots H_{n,m}^{F_m(S)} H_{n-1},$$

a u slučaju, da je $\sqrt[l^{n-1}]{\mu}$ od oblika (4), ovaj:

Digitized by Google

$$(6) \qquad \mathrm{E}_n^f = \mathrm{H}_{n,1}^{F_1(S)} \ldots \mathrm{H}_{n,m}^{F_m(S)} \mathrm{H}_{n-1} \left(\sqrt[l]{\Xi}\right)^e;$$

tu je u obje jednadžbe (5) i (6) H_{n-1} jedinica u K_{n-1}.

S pomoću jednadžbi (5) i (6) dokazat ćemo ovu poučku:

8. poučka. Neka nam naznačuje

$$\mathrm{H}_{n,1}, \ldots, \mathrm{H}_{n,m}$$

sustav relativnih temeljnih jedinica tijela K_n s obzirom na tijelo k;

$$\mathrm{H}_{n-1,1}, \ldots, \mathrm{H}_{n-1,m}$$

sustav relativnih temeljnih jedinica tijela K_{n-1} s obzirom na k; i t. d. napokon

$$\mathrm{H}_{1,1}, \ldots, \mathrm{H}_{1,m}$$

sustav relativnih temeljnih jedinica tijela $K_1 = K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ s obzirom na k.

Stavimo li tada

$$\eta_{n,1} = N_{n,k}(\mathrm{H}_{n,1}), \ldots, \eta_{n,m} = N_{n,k}(\mathrm{H}_{n,m}),$$
$$\eta_{n-1,1} = N_{n-1,k}(\mathrm{H}_{n-1,1}), \ldots, \eta_{n-1,m} = N_{n-1,k}(\mathrm{H}_{n-1,m}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\eta_{1,1} = N_{1,k}(\mathrm{H}_{1,1}), \ldots, \eta_{1,m} = N_{1,k}(\mathrm{H}_{1,m}),$$

gdje nam $N_{n,k}, N_{n-1,k}, \ldots, N_{1,k}$ nadaju po redu norme uzete u tjelesima $K_n, K_{n-1}, \ldots, K_1$ uvijek s obzirom na tijelo k, to se dade svaka jedinica ε tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{n,k}$ jedinice u K_n, prikazati u obliku

$$(7) \qquad \varepsilon = \eta_1^{l^n} \prod_{1}^{n} \left[s\right] \left(\eta_{s,1}^{u_{s,1}} \ldots \eta_{s,m}^{u_{s,m}}\right)^{l^{n-s}},$$

Digitized by Google

ako μ nije jednak umnošku jedinice i l-te potencije cijeloga broja u k; ako li je pak μ umnožak jedinice i l-te potencije cijeloga broja tijela k, u obliku

$$(8) \qquad \varepsilon = \xi^e \eta^{l^n} \prod_{1}^{n} \left(\eta_{s,1}^{u_{s,1}} \dots \eta_{s,m}^{u_{s,m}} \right)^{l^{n-s}}.$$

U obje je jednadžbe η jedinica tijela k, a eksponenti $u_{s,1}, \dots, u_{s,m}$ imaju izvjesne vrijednosti $0, 1, 2, \dots, l-1$; eksponenat pak e izvjesnu vrijednost manju od l^n.

Ako je u tijelu K_i

$$\sqrt[l^i]{\mu} = \Xi_i \quad \mathrm{A}_i^l,$$

gdje je Ξ_i jedinica, a A_i cio broj tijela K_i, ali u tijelu K_{i+1} više nije $\sqrt[l^{i+1}]{\mu}$ jednak produktu jedinice toga tijela K_{i+1} sa l-tom potencijom cijeloga broja istoga tijela K_{i+1}, stavili smo u (8)

$$\xi = N_{n,k}(\Xi_{n-1}).$$

Dokaz. Ako načinimo s obje strane jednadžbi (5), (6) relativne norme $N_{n,k}$, dobit ćemo

$$(9) \qquad \varepsilon^f = \eta_{n,1}^{F_1(1)} \dots \eta_{n,m}^{F_m(1)} \left[N_{n-1,k}(\mathrm{H}_{n-1}) \right]^l$$

i

$$(10) \qquad \varepsilon^f = \eta_{n,1}^{F_1(1)} \dots \eta_{n,m}^{F_m(1)} \left[N_{n-1,k}(\mathrm{H}_{n-1}) \right]^l \xi^e,$$

gdjeno stavismo

$$\varepsilon = N_{n,k}(\mathrm{E}_n), \quad \xi = N_{n,k}(\sqrt[l]{\Xi}).$$

Obazremo li se na to, da su $\varepsilon, \eta_{n,1}, \dots, \eta_{n,m}$ sigurno također norme $N_{n-1,k}$ jedinica tijela K_{n-1}, moći ćemo lako jednadžbama (9), (10) podati ovaj oblik:

Digitized by Google

$$(11) \qquad \varepsilon = \eta_{n,1}^{u_{n,1}} \dots \eta_{n,m}^{u_{n,m}} \left[N_{n-1,k}(\mathrm{H}^*_{n-1}) \right]^l ,$$

i

$$(12) \qquad \varepsilon = \eta_{n,1}^{u_{n,1}} \dots \eta_{n,m}^{u_{n,m}} \left[N_{n-1,k}(\mathrm{H}^*_{n-1}) \right]^l \xi^e ,$$

gdje je H^*_{n-1} jedinica tijela K_{n-1}, a eksponenti $u_{n,1}, \dots, u_{n,m}$ imaju koju od vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1.

Jasno je, da će za svaku jedinicu ε_{n-1} tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{n-1,k}$ tijela K_{n-1}, vrijediti jednadžba od oblika

$$(13) \qquad \varepsilon_{n-1} = \eta_{n-1,1}^{a_{n-1,1}} \dots \eta_{n-1,m}^{a_{n-1,m}} \left[N_{n-2,k}(\mathrm{H}_{n-2}) \right]^l$$

ili, ako je

$$\sqrt[l^{n-2}]{\mu} = \Xi_{n-2}\, \mathrm{A}^l_{n-2} ,$$

gdje je Ξ_{n-2} jedinica, a A_{n-2} cio broj tijela K_{n-2}, pak ako stavimo

$$\xi_{n-1} = N_{n-1,k}(\sqrt[l]{\Xi}) ,$$

jednadžba od oblika

$$(14) \qquad \varepsilon_{n-1} = \eta_{n-1,1}^{a_{n-1,1}} \dots \eta_{n-1,m}^{a_{n-1,m}} \left[N_{n-2,k}(\mathrm{H}_{n-2}) \right]^l \xi_{n-1}^{e_1} .$$

Tu je H_{n-2} jedinica u K_{n-2}, a eksponenti $a_{n-1,1}, \dots, a_{n-1,m}$, e imaju izvjesne vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1.

Slične ćemo jednadžbe moći napisati za jedinice ε_{n-2} tijela k, koje su jednake relativnim normama $N_{n-2,k}$ jedinica tijela K_{n-2} i t. d. i napokon za jedinice ε_1 tijela k, koje su jednake relativnim normama $N_{1,k}$ jedinica tijela K_1.

Primijenimo li to na relativne norme

Digitized by Google

$$N_{n-1,\,k}\,(H^*_{n-1}),\quad N_{n-2,\,k}\,(H_{n-2}),\ldots.$$

u jednadžbama (11), (12), (13), (14) i t. d., pa stavimo li u (11), (12)

$$(15)\quad N_{n-1,\,k}\left(H^*_{n-1}\right) = \eta_{n-1,\,1}^{u_{n-1,\,1}}\ldots\eta_{n-1,\,m}^{u_{n-1,\,m}}\left[N_{n-2,k}(H_{n-2})\right]^l$$

ili

$$(16)\quad N_{n-1,\,k}\left(H^*_{n-1}\right) = \eta_{n-1,\,1}^{u_{n-1,\,1}}\ldots\eta_{n-1,\,m}^{u_{n-1,\,m}}\left[N_{n-2,k}(H_{n-2})\right]^l \xi_{n-1}^{e_1};$$

nadalje u (13), (14)

$$N_{n-2,\,k}\left(H_{n-2}\right) = \eta_{n-2,\,1}^{u_{n-2,\,1}}\ldots\eta_{n-2,\,m}^{u_{n-2,\,m}}\left[N_{n-3,k}(H_{n-3})\right]^l$$

ili

$$N_{n-2}\left(H_{n-2}\right) = \eta_{n-2,\,1}^{u_{n-2,\,1}}\ldots\eta_{n-2,\,m}^{u_{n-2,\,m}}\left[N_{n-3,k}(H_{n-3})\right]^l \xi_{n-2}^{e_2}$$

i t. d., uvjerit ćemo se lako o ispravnosti jednadžbi (7) i (8).

§ 5.

Dvolični ideali, razredi i kompleksi relativno cikličnoga tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Ako je $\mathfrak{A}$ kojigod ideal tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, za koji valja jednadžba

$$S\mathfrak{A} = \mathfrak{A},$$

zvat ćemo $\mathfrak{A}$ **dvoličnim idealom** tijela K_n. Ako je pak C kojigod idealski razred u K_n, za koji je

$$SC = C,$$

zvat ćemo C **dvoličnim idealskim razredom** tijela K_n.

Digitized by Google

Jasno je, da je l^n-ta potencija svakoga dvoličnoga idealskoga razreda takav razred, koji među svojim idealima sadržava ideale, koji u k leže.

Ako nam C predočuje kojigod idealski razred u K_n, nazvat ćemo skup svih idealskih razreda $c\,C$, gdje za c valja staviti sve razrede tijela k, kompleksom tijela K_n s obzirom na tijelo k. Kompleks, koji sadržava sve razrede c tijela k, neka se zove glavni kompleks.

Ako pomnožimo svaki razred kompleksa P svakim razredom kompleksa Q, sačinjavat će razredi, što ih dobijemo na taj način, opet kompleks, koji ćemo nazvati produktom kompleksa P i Q i obilježiti sa $P.\,Q$. Ako imamo više kompleksa, od kojih se nijedan ne da prikazati produktom ostalih, isključivši naravno glavni kompleks, kazat ćemo, da su zadani kompleksi među sobom neovisni.

Uzmimo, da je C razred kompleksa P, onda i razred SC određuje kompleks, za koji ćemo kazati, da je relativno konjugiran sa P, i obilježiti ga sa SP. Ako je napose kompleks P identičan sa svojim relativno konjugiranim kompleksom SP, zvat ćemo ga dvoličnim kompleksom tijela K_n s obzirom na tijelo k.

Ako uzmemo, da je broj idealskih razreda h tijela k broj prost prema l, možemo lako pokazati, da dvoličan kompleks tijela K_n s obzirom na tijelo k sadržava same dvolične idealske razrede.

§ 6.

O broju dvoličnih kompleksa tijela K_n s obzirom na tijelo k.

Ako je ε kojagod jedinica tijela k, nazvat ćemo sustav jedinica, koji nastane, ako u produktu $\varepsilon\,\xi^m$ broj ξ prođe sve jedinice tijela k, jediničnom svezom m-toga stepena u tijelu k.

Osim pretpostavaka, što smo ih dosad učinili o tijelu k, učinit ćemo odsad još i tu, da je broj idealskih razreda h tijela k broj prost prema l.

Tada valja ova poučka

9. poučka. Označimo sa $D_{n,k}$, $D_{n-1,k}$, $D_{n-2,k}$, . . . , $D_{1,k}$ relativne diskriminante tjelesa K_n, K_{n-1}, K_{n-2}, . . , K_1 s ob-

Digitized by Google

zirom na k, pa neka bude broj svih među sobom različitih prostih ideala tijela k sadržanih u $D_{n,k}$: $t_1+t_2+t_3+\ldots+t_n$; broj svih takovih prostih ideala, koji su sadržani kao faktori u $D_{n-1,k}$ točno $t_1+t_2+t_3+\ldots+t_{n-1}$ i t. d.; napokon broj svih različitih prostih ideala tijela k sadržanih u $D_{1,k}$ točno t_1; nadalje neka one jedinice u k, koje su jednake relativnim normama $N_{n,k}$ jedinica tijela K_n, tvore l^{w^*} različnih jediničnih sveza l^n-toga stepena: tada valja, ako označimo sa l^{na^*} broj svih dvoličnih kompleksa tijela K_n s obzirom na k, koji izilaze iz dvoličnih ideala tijela K_n, za a^* snošaj

$$a^* \leqq t + v^* - m - 1,$$

gdjeno je stavljeno

$$t = \frac{nt_1 + (n-1)\,t_2 + (n-2)\,t_3 + \ldots + t_n}{n}, \quad v^* = \frac{w^*}{n}.$$

Dokaz. Uzmimo ponajprije, da broj μ, koji određuje tijelo $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, nije produkt jedinice u k i l-te potencije cijeloga broja istoga tijela k.

Tada valja za svaku jedinicu ε u k, koja je relativna norma $N_{n,k}$ jedinice u K_n, prema 8. poučki jednadžba od ovoga oblika

$$(1) \qquad \varepsilon = \eta^{l^n} \prod_{1}^{n} \left(\eta_{s,1}^{u_{s,1}} \ldots \eta_{s,m}^{u_{s,m}} \right)^{l^{n-s}},$$

gdjeno treba vidjeti značenje pojedinih veličina u 8. poučki.

Među jedinicama $\eta_{1,1}, \ldots, \eta_{1,m}$, koje su relativne norme $N_{1,k}$ jedinica tijela $K_1 = K(\sqrt[l]{\mu}, k)$, bit će izvjestan maksimalni broj v_1^* takovih, označimo ih sa $\eta_{1,1}, \ldots, \eta_{1,v_1^*}$, za koje snošaj od oblika

$$\eta_{1,1}^{a_1} \ldots \eta_{1,v_1^*}^{a_{v_1^*}} = \xi^l,$$

Digitized by Google

gdje je ξ jedinica u k, a eksponenti $a_1, \ldots, a_{v_1^*}$ mogu imati koju od vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1, ne može da postoji, osim ako su svi eksponenti $a_1, \ldots, a_{v_1^*}$ jednaki 0.

Tada se dade svaka jedinica η_1 tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{1,k}$ koje jedinice tijela K_1, jednoznačno prikazati u obliku

$$\eta_1 = \eta_{1,1}^{a_{,1}} \ldots \eta_{1,v_1^*}^{a_{1,v_1^*}} \xi^l,$$

gdjeno je ξ jedinica u k, a eksponenti $a_{1,1}, \ldots, a_{1,v_1^*}$ imaju izvjesne između vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1.

Prema (1) dat će se svaka jedinica η_2 tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{2,k}$ jedinice u K_2, prikazati u obliku

$$\eta_2 = \eta_{2,1}^{u_{2,1}} \ldots \eta_{2,m}^{u_{2,m}} \eta_{1,1}^{lu_{1,1}} \ldots \eta_{1,v_1^*}^{lu_{1,v_1^*}} \eta^{l^2},$$

gdje je η jedinica u k, a eksponenti $u_{2,1}, \ldots, u_{2,m}, u_{1,1}, \ldots, u_{1,v_1^*}$ imaju neke vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1. No ako jedinice tijela k, koje su jednake relativnim normama $N_{2,k}$ jedinica tijela K_2, u svem čine $l^{v_1^*+v_2^*}$ različitih jediničnih sveza stepena l^2, moći ćemo odrediti između jedinica $\eta_{2,1}, \ldots, \eta_{2,m}$ v_1^* takovih, označimo ih sa $\eta_{2,1}, \ldots, \eta_{2,v_2^*}$, da se uzmogne svaka jedinica η_2 tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{2,k}$ koje jedinice u K_2, samo na jedan način prikazati u obliku

$$\eta_2 = \eta_{2,1}^{u_{2,1}} \ldots \eta_{2,v_2^*}^{u_{2,v_2^*}} \eta_{1,1}^{lu_{,1}}, \ldots, \eta_{1,v_1^*}^{lu_{1,v_1^*}} \eta^{l^2},$$

gdje je η jedinica u k, a eksponenti $u_{2,1}, \ldots, u_{2,v_2^*}, u_{1,1}, \ldots, u_{1,v_1^*}$ imaju izvjesne između vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1.

Nastavimo li taj postupak, moći ćemo, ako one jedinice u k, koje su jednake relativnim normama $N_{3,k}$ jedinica u K_3, čine svega $l^{v_1^*+v_2^*+v_3^*}$ jediničnih sveza stepena l^3, među jedinicama $\eta_{3,1}, \ldots, \eta_{3,m}$ odrediti v_3^* jedinica, označimo ih n. pr. sa

Digitized by Google

$\eta_{3,1}, \ldots, \eta_{3,v_3^*}$, tako da se uzmogne svaka jedinica η_3 u k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{3,k}$ koje jedinice tijela K_3, prikazati samo na jedan način u obliku

$$\eta_3 = \eta_{3,1}^{u_{3,1}} \ldots \eta_{3,r_3^*}^{u_{3,v_3^*}} \eta_{2,1}^{lu_{2,1}} \ldots \eta_{2,v_2^*}^{lu_{2,v_2^*}} \eta_{1,1}^{l^2u_{1,1}} \ldots \eta_{1,v_1^*}^{l^2u_{1,v_1^*}} \eta^{l^3},$$

gdje je η jedinica u k, a eksponenti $u_{3,1}, \ldots, u_{3,v_3^*}, u_{2,1}, \ldots, u_{2,v_2^*}, u_{1,1}, \ldots, u_{1,v_1^*}$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l-1$.

Tako ćemo i dalje postupati, dok ne dođemo do tijela K_n.

Uzmimo uopće, da one jedinice η_s u k, koje su jednake relativnim normama $N_{s,k}$ jedinica tijela K_s, čine u svem

$$l^{v_1^*+v_2^*+\ldots+v_s^*}$$

jediničnih sveza stepena l^s, gdje za s treba uzeti po redu brojeve $1, 2, \ldots, n$. Tada ćemo među jedinicama

$$\eta_{s,1}, \ldots, \eta_{s,m},$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

moći odrediti $w^* = v_1^*+v_2^*+v_3^*+\ldots+v_n^*$ takovih, označimo ih n. pr. sa

$$\eta_{s,1}, \ldots, \eta_{s,v_s^*},$$
$$(s = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

da se uzmogne svaka jedinica η_n tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{n,k}$ koje jedinice u K_n, prikazati, i to samo na jedan način, u obliku

$$(2) \qquad \eta_n = \eta^{l^n \prod_{1}^{n} \left(\eta_{s,1}^{u_{s,1}} \ldots \eta_{s,v_s^*}^{u_{s,v_s^*}} \right)^{l^{n-s}}},$$

Digitized by Google

gdje je η jedinica u k, a eksponenti

$$u_{s,1}, \ldots, u_{s,v_s^*},$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n),$$

imaju izvjesne između vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l-1$.

Primijenimo taj resultat napose na jedinice

$$\eta_{s,v_s^*+1}, \ldots, \eta_{s,m},$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n).$$

Tu ćemo tada dobiti snošaje od oblika

$$\eta_{s,v_s^*+w} = \zeta_{s,w}^{l^s} \prod_{1}^{s} \left(\eta_{x,1}^{u_{x,1}^{(s,w)}} \ldots \eta_{x,v_x^*}^{u_{x,v_x^*}^{(s,w)}} \right)^{l^{s-x}},$$
$$\left(\begin{matrix} w = 1, 2, \ldots, m - v_s^*; \\ s = 1, 2, \ldots, n \end{matrix} \right),$$

gdje nam $\zeta_{s,w}$ predočuje jedinicu u k, a eksponenti $u^{(s,w)}$ imaju izvjesne vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l-1$.

Odatle izvodimo, da su izrazi

$$(3) \qquad H'_{s,v_s^*+w} = H_{s,v_s^*+w}\, \zeta_{s,w}^{-1} \prod_{1}^{s} \left(H_{x,1}^{u_{x,1}^{(s,w)}} \ldots H_{x,v_x^*}^{u_{x,v_x^*}^{(s,w)}} \right)^{-l^{s-x}},$$
$$(w = 1, 2, \ldots, m - v_s^*),$$

jedinice u tijelu $K_s = K(\sqrt[l^s]{\mu}, k)$, kojima su relativne norme $N_{s,k}$ jednake 1. To valja za sve brojeve s od 1 do n.

Stoga ćemo moći naći u tijelu K_s takove cijele brojeve $M_{s,1}$, $M_{s,2}$, ..., $M_{s,m-v_s^*}$, da bude

$$(4) \qquad H'_{s,v_s^*+1} = M_{s,1}^{1-S}, H'_{s,v_s^*+2} = M_{s,2}^{1-S}, \ldots, H'_{s,m} = M_{s,m-v_s^*}^{1-S}.$$

Digitized by Google

To i opet vrijedi za sve brojeve s od 1 do n.

Cijeli brojevi

$$(5) \qquad \mathfrak{M}_{s,0} = \sqrt[l^s]{\mu}, \quad \mathfrak{M}_{s,1}, \quad \mathfrak{M}_{s,2}, \ldots, \mathfrak{M}_{s,m-v_s^*}$$

određuju nam $m-v_s^*+1$ dvoličnih glavnih ideala tijela K_s s obzirom na tijelo k.

Označimo sa

$$(6) \qquad \mathfrak{D}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{1,t_1}$$

dvolične proste ideale tijela $K_1 = K(\sqrt[l]{\mu}, k)$ s obzirom na k, a sa

$$(7) \qquad \mathfrak{D}_{s,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{s,t_1}$$

proste ideale tijela $K_s = K(\sqrt[l^s]{\mu}, k)$ sadržane po redu u idealima $\mathfrak{D}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{1,t_1}$, to su ti prosti ideali $\mathfrak{D}_{s,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{s,t_1}$ dvolični u K_s s obzirom na tijelo k, te su sadržani kao faktori u relativnoj diskriminanti $D_{s,k}$ tijela K_s.

Osim dvoličnih prostih ideala $\mathfrak{D}_{2,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{2,t_1}$ tijela K_2 sadržavat će relativna diskriminanta $D_{2,k}$ uopće još i takove dvolične proste ideale tijela K_2 kao faktore, kojih je l-ta potencija već ideal u k; osim toga može biti u $D_{2,k}$ sadržano još i takovih prostih ideala $\mathfrak{D}^*$ tijela K_2, koji doduše nijesu dvolični s obzirom na tijelo k, ali su dvolični s obzirom na tijelo K_1, tako da je produkt

$$(8) \qquad \mathfrak{D} = \mathfrak{D}^* . S\mathfrak{D}^* . S^2\mathfrak{D}^* . \ldots . S^{l-1}\mathfrak{D}^*$$

dvoličan ideal tijela K_2 s obzirom na tijelo k. Označimo sa

$$(9) \qquad \mathfrak{D}_{2,t_1+1}, \mathfrak{D}_{2,t_1+2}, \ldots, \mathfrak{D}_{2,t_1+t_2}$$

djelomice dvolične proste ideale tijela K_2, koji su osim dvoličnih ideala $\mathfrak{D}_{2,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{2,t_1}$ još u $D_{2,k}$ sadržani kao faktori, a djelomice opet različite produkte od oblika (8).

Digitized by Google

Ako je tada $\mathfrak{D}_{2,u}$ dvoličan prost ideal iz niza (9), a $\mathfrak{D}_{s,u}$ u njemu sadržan prost ideal tijela K_s, to je i $\mathfrak{D}_{s,u}$ dvoličan s obzirom na k; ako li je $\mathfrak{T}_{2,u}$ produkt od oblika (8), te je

$$\mathfrak{D}_{2,u} = \mathfrak{D}^*_{2,u} \cdot S\mathfrak{D}^*_{2,u} \cdot \ldots \cdot S^{l-1}\mathfrak{D}^*_{2,u},$$

pak ako obilježimo prosti ideal tijela K_s, koji je sadržan kao faktor u prostom idealu $\mathfrak{D}^*_{2,u}$ tijela K_2, sa $\mathfrak{D}^*_{s,u}$, to je i produkt

$$\mathfrak{D}_{s,u} = \mathfrak{D}^*_{s,u} \cdot S\mathfrak{D}^*_{s,u} \cdot \ldots \cdot S^{l-1}\mathfrak{D}^*_{s,u}$$

dvoličan ideal tijela K_s s obzirom na tijelo k.

Dok se svaki dvolični ideal tijela K_1 dade izraziti kao produkt idealâ niza (6) sa idealom tijela k, tako da se u taj produkt ne uzme od pojedinih ideala (6) viša potencija od l—1, moramo se poslužiti, ako hoćemo tim načinom da izrazimo dvoličan ideal tijela K_2 s obzirom na k, idealima

$$\mathfrak{D}_{2,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{2,t_1+t_2}, \mathfrak{D}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{1,t_1}.$$

Postupamo li dalje sa relativnom diskriminantom $D_{3,k}$, kao što smo postupali sa $D_{2,k}$, doći ćemo do ideala

$$(10) \quad \mathfrak{D}_{3,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{3,t_1+t_2+t_3}; \mathfrak{D}_{2,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{2,t_1+t_2}; \mathfrak{D}_{1,1}, \ldots, \mathfrak{D}_{1,t_1},$$

te ćemo njima moći izraziti svaki dvolični ideal tijela K_3 kao produkt takovih ideala (10) sa idealom u k, tako da u produkt ne uzmemo ni od jednoga između ideala (10) višu potenciju od l—1. I t. d.

Prema tomu ćemo moći dvolične glavne ideale

$$(M_{s,0}), (M_{s,1}), (M_{s,2}), \ldots, (M_{s,m-v_s^*})$$

prikazati u obliku

Digitized by Google

$$(11)\qquad \left(\mathrm{M}_{s,u}\right)=\prod_{(i_s,\, i_{s-1},\dots i_1)} \mathfrak{D}_{s,\, i_s}^{a^{(u)}_{s,\, i_s}}\, \mathfrak{D}_{s-1,\, i_{s-1}}^{a^{(u)}_{s-1,\, i_{s-1}}} \cdots \mathfrak{D}_{1,\, i_1}^{a^{(u)}_{1,\, i_1}}\, \mathrm{j}_s^{(u)},$$

$$\left|\begin{array}{l} u = 0,\, 1,\, 2,\, \dots,\, m-v_s^*, \\ i_s = 1,\, 2,\, \dots,\, t_1+t_2+\dots+t_s, \\ i_{s-1} = 1,\, 2,\, \dots,\, t_1+t_2+\dots+t_{s-1}, \\ -\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,-\,, \\ i_1 = 1,\, 2,\, \dots,\, t_1 \end{array}\right|;$$

tu su $\mathfrak{D}_{s,\, i_s}, \dots, \mathfrak{D}_{1,\, i_1}$ ideali određeni gore razvijenim postupkom; $\mathrm{j}_s^{(u)}$ je ideal u k, a eksponenti $a^{(u)}_{s,\, i_s}, \dots, a^{(u)}_{1,\, i_1}$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, 2, \dots, l-1$.

Jednadžba (11) valja za sve brojeve s od 1 do n. Napišemo li sve te jednadžbe za $s = 1, 2, \dots, n$. dobit ćemo u svem

$$nm - (v_1^* + v_2^* + \dots + v_n^*) + n$$

jednadžbi.

Dokazat ćemo, da su sve te jednadžbe između sebe novisne, to znači, da ne može postojati snošaj od oblika

$$(12)\qquad \prod_{s=1}^{n} \left(\mathrm{M}_{s,\,0}\right)^{e_0^{(s)}} \left(\mathrm{M}_{s,\,1}\right)^{e_1^{(s)}} \left(\mathrm{M}_{s,\,2}\right)^{e_2^{(s)}} \cdots \left(\mathrm{M}_{s,\, m-v_s^*}\right)^{e^{(s)}_{m-v_s^*}} = \mathrm{j},$$

gdje su eksponenti $e_0^{(s)}, e_1^{(s)}, \dots, e^{(s)}_{m-r_s^*}$ kojigod između brojeva $0, 1, 2, \dots, l-1$, a j ideal u k, osim ako su svi eksponenti $e_0^{(s)}, e_1^{(s)}, \dots, e^{(s)}_{m-v_s^*}$ jednaki 0, a $\mathrm{j} = 1$.

Za tu ćemo svrhu potencirati (12) sa h, te ćemo dobiti

Digitized by Google

$$(13)\qquad \prod_{1}^{n}{}_{s}\, \mathrm{M}_{s,0}^{e_0^{(s)}h}\, \mathrm{M}_{s,1}^{e_1^{(s)}h}\, \mathrm{M}_{s,2}^{e_2^{(s)}h} \ldots \mathrm{M}_{s,\,m-v_s^*}^{e_{m-v_s^*}^{(s)}h} = \iota\, \mathrm{E}_n,$$

gdje je ι cio broj tijela k, a E_n jedinica u K_n. Dignimo sada tu jednadžbu (13) na $(1-S)$-tu simboličnu potenciju. Izići će

$$\prod_{1}^{n}{}_{s}\left(\mathrm{M}_{s,0}^{1-S}\right)^{e_0^{(s)}h}\left(\mathrm{M}_{s,1}^{1-S}\right)^{e_1^{(s)}h} \ldots \left(\mathrm{M}_{s,\,m-v_s^*}^{1-S}\right)^{e_{m-v_s^*}^{(s)}h} = \mathrm{E}_n^{1-S}$$

ili dalje poradi jednadžbi (4)

$$(14)\qquad \prod_{1}^{n}{}_{s}\, \zeta^{-l^{n-s}e_0^{(s)}h}\, \mathrm{H}'^{\,e_1^{(s)}h}_{s,\,v_s^*+1} \ldots \mathrm{H}'^{\,e_{s,\,m-v_s^*}^{(s)}h}_{s,\,m} = \mathrm{E}_n^{1-S}.$$

Uvedemo li u tu jednadžbu ponajprije za $\mathrm{H}'_{n,\,v_n^*+1}, \ldots, \mathrm{H}'_{n,\,m}$ vrijednosti prema (3), uvjerit ćemo se odmah, ako se obazremo na svojstvo relativnih temeljnih jedinica $\mathrm{H}_{n,1}, \ldots, \mathrm{H}_{n,m}$ izraženo 6. poučkom, da eksponenti $e_1^{(n)}, \ldots, e_{m'-v_n^*}^{(n)}$ svi moraju biti jednaki 0. Nadalje ćemo uvesti u (14) za $\mathrm{H}'_{n-1,\,v_{n-1}^*+1}, \ldots, \mathrm{H}'_{n-1,\,m}$ vrijednosti prema (3), te ćemo se opet lako uvjeriti, da poradi svojstva relativnih temeljnih jedinica $\mathrm{H}_{n-1,1}, \ldots, \mathrm{H}_{n-1,m}$, što ga izražava 6. poučka, eksponenti $e_1^{(n-1)}, \ldots, e_{m-v_{n-1}^*}^{(n-1)}$ moraju svi biti jednaki 0. I t. d.

Digitized by Google

Tako ćemo postepeno uvidjeti, da u (14) moraju svi eksponenti $e_w^{(s)}$, gdje je $w > 0$, biti jednaki 0, te samo još valja dokazati, da su i eksponenti

$$e_0^{(1)}, \quad e_0^{(2)}, \ldots, \quad e_0^{(n)}$$

jednaki 0.

Iz jednadžbe (13) dobivamo, da je

$$\mathrm{M}_{1,0}^{e_0^{(1)}h} \mathrm{M}_{2,0}^{e_0^{(2)}h} \ldots \mathrm{M}_{n,0}^{e_0^{(n)}h} = \iota \mathrm{E}_n,$$

a odatle, ako tu jednadžbu dignemo na l^n-tu potenciju,

$$\mu^{(l^{n-1}e_0^{(1)}+l^{n-2}e_0^{(2)}+\ldots+e_0^{(n)})h} = \iota^{l^n} \mathrm{E}_n^{l^n}.$$

Prema tome morala bi biti $\mathrm{E}_n^{l^n}$ jedinica u k, no to se protivi pretpostavci o broju μ, ako nijesu svi eksponenti $e_0^{(1)}, e_0^{(2)}, \ldots, e_0^{(n)}$ jednaki 0. Vidimo dakle, da relacija od oblika (13) ne može postojati, osim ako su eksponenti $e_0^{(s)}, e_1^{(s)}, \ldots, e_{m-v_s^*}^{(s)}$ za $s = 1, 2, \ldots, n$ svi jednaki 0.

Odatle izvodimo, da se s pomoću jednadžbi (11) dade

$$nm - (v_1^* + v_2^* + \ldots + v_n^*) + n$$

između ideala

$$\begin{array}{l} \mathfrak{D}_{n,1}, \quad \mathfrak{D}_{n,2}, \ldots, \quad \mathfrak{D}_{n,\, t_1+t_2+\ldots+t_n}, \\ \mathfrak{D}_{n-1,1}, \quad \mathfrak{D}_{n-1,2}, \ldots, \quad \mathfrak{D}_{n-1,\, t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}}, \\ \text{— — — — — — — — — — — — — — —}, \\ \mathfrak{D}_{1,1}, \quad \mathfrak{D}_{1,2}, \ldots, \quad \mathfrak{D}_{1,\, t_1} \end{array}$$

Digitized by Google

izraziti produktom ostalih ideala s idealom tijela k, ali tako, da pojedini ideali ne zađu u produkt u višoj potenciji od l—1.

Ako te preostale ideale obilježimo sa

$$\mathfrak{A}_1, \quad \mathfrak{A}_2, \ldots, \quad \mathfrak{A}_{t^*},$$

gdjeno je

$$(15) \quad t^* = nt_1 + (n-1)t_2 + \ldots + t_n + v_1^* + v_2^* + \ldots + v_n^* - nm - n,$$

moći ćemo dakle svaki dvolični ideal $\mathfrak{A}$ tijela K_n prikazati u obliku

$$(16) \qquad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1^{a_1} \mathfrak{A}_2^{a_2} \ldots \mathfrak{A}_{t^*}^{a_{t^*}} \mathfrak{j},$$

gdje je $\mathfrak{j}$ ideal u k, a eksponenti $a_1, a_2, \ldots, a_{t^*}$ imaju izvjesne vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1.

Ako među idealima $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \ldots, \mathfrak{A}_{t^*}$ više ne postoji relacija od oblika (11), to je očito

$$a^* = \frac{nt_1 + (n-1)t_2 + \ldots + t_n}{n} + \frac{v_1^* + v_2^* + \ldots + v_n^*}{n} - m - 1$$
$$= t + v^* - m - 1.$$

U svakom je dakle slučaju

$$a^* \underset{=}{<} t + v^* - m - 1,$$

kako to tvrdi 9. poučka.

Da ta poučka valja i u isključenom slučaju, gdje je μ produkt jedinice tijela k sa l-tom potencijom cijeloga broja istoga tijela k, lako se uvjeriti.

Dobiveni ćemo resultat odmah poopćiti tim, da dokažemo, da valja ova poučka:

10. p o u č k a. Neka brojevi $t_1, t_2, \ldots, t_n$ imaju ono isto značenje, što ga imađahu u 9. poučki; nadalje neka one jedinice tijela k, koje su jednake relativnim normama $N_{n,k}$ jedinica ili razlomljenih brojeva tijela K_n, čine l^w različnih jediničnih sveza ste-

Digitized by Google

pena l^n: onda valja, ako broj svih dvoličnih kompleksa u K_n označimo sa l^{na}, za a relacija

$$a \leqq t + v - m - 1,$$

gdjeno stavismo

$$t = \frac{nt_1 + (n-1)t_2 + \ldots + t_n}{n}, \quad v = \frac{w}{n}.$$

Dokaz. Neka jedinice

$$\eta_{s,1}, \ldots, \eta_{s,v_s^*},$$
$$(s = 1, 2, \ldots, n)$$

imaju ono značenje, što ga imađahu u jednadžbi (2), tada ćemo moći odrediti u k $w-w^*$ jedinica, označimo ih sa $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{w-w^*}$, koje su jednake relativnim normama $N_{n,k}$ razlomljenih brojeva tijela K_n, tako da ne može postojati snošaj od oblika

$$\eta\, \vartheta_1^{a_1} \ldots \vartheta_{w-w^*}^{a_{w-w^*}} \Big|\!\Big|_1^n \left(\eta_{s,1}^{u_{s,1}} \ldots \eta_{s,v_s^*}^{u_{s,v_s^*}} \right)^{l^{n-s}} = 1,$$

u kom je η jedinica u k, a eksponenti $a_1, \ldots, a_{w-w^*}$, $u_{s,1}, \ldots, u_{s,v_s^*}$ imaju koju od vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l-1$, ako nijesu svi ti eksponenti jednaki 0.

Pomislimo, da su jedinice $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{w-w^*}$ određene tako, da je

$$\vartheta_x^{a_{x+1}^{(x)}} \vartheta_{x+1}^{a_{w-w^*}^{(x)}} \ldots \vartheta_{w-w^*}^{l} \eta_x^{n} \Big|\!\Big|_1^n \left(\eta_{s,1}^{u_{s,1}^{(x)}} \ldots \eta_{s,v_s^*}^{u_{s,v_s^*}^{(x)}} \right)^{l^{n-s}} = 1,$$

$$(x = w - w^*, w - w^* - 1, \ldots, 1),$$

gdjeno eksponenti $a_{x+1}^{(x)}, \ldots, a_{w-w^*}^{(x)}, u_{s,1}^{(x)}, \ldots, u_{s,v_s^*}^{(x)}$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l-1$, a η_x predo-

Digitized by Google

čuje prikladnu jedinicu u k. Tada ćemo moći svaku jedinicu ϑ tijela k, koja je jednaka relativnoj normi $N_{n,k}$ jedinice ili razlomljena broja tijela K_n, samo jednim načinom prikazati u obliku

$$\vartheta = \vartheta_1^{a_1} \dots \vartheta_{w-w^*}^{a_{w-w^*}} \eta^{l^n} \prod_{1}^{n} \left(\begin{matrix} u_{s,1} & u_{s,v_s^*} \\ \eta_{s,1} & \dots \eta_{s,v_s^*} \end{matrix} \right)^{l^{n-s}},$$

gdjeno je η jedinica u k, a eksponenti

$$a_1, \dots, a_{w-w^*}, \quad u_{s,1}, \dots, \quad u_{s,v_s^*}$$

imaju izvjesne između vrijednosti 0, 1, 2, . . . , $l-1$.

Ako sada označimo sa $\Theta_1, \dots, \Theta_{w-w^*}$ brojeve u K_n, za koje je

$$\vartheta_1 = N_{n,k}(\Theta), \dots, \vartheta_{w-w^*} = N_{n,k}(\Theta),$$

moći ćemo kao Hilbert u A. Z. § 148 ili kao Furtwängler u svojoj nagrađenoj radnji § 5, Satz 20 odrediti $w-w^*$ ideala

$$\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{w-w^*}$$

tako, da bude

$$\Theta_1 = \mathfrak{B}_1^{1-S}, \dots, \Theta_{w-w^*} = \mathfrak{B}_{w-w^*}^{1-S},$$

i pokazati, da se svaki dvolični kompleks tijela K_n dade prikazati produktom dvoličnih kompleksa, što ih određuju ideali $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{t^*}$ (vidi jednadžbu (16)) i ideali $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{w-w^*}$, i to tako, da se u produkt ne uzme od tih ideala viša potencija od $l-1$.

Ako među kompleksima $A_1, \dots, A_{t^*}$, $B_1, \dots, B_{w-w^*}$, koji potječu od ideala $\mathfrak{A}_1, \dots, \mathfrak{A}_{t^*}$, $\mathfrak{B}_1, \dots, \mathfrak{B}_{w-w^*}$, ne može postojati relacija

$$A_1^{a_1} \dots A_{t^*}^{a_{t^*}} B_1^{b_1} \dots B_{w-w^*}^{b_{w-w^*}} = 1,$$

Digitized by Google

u kojoj eksponenti $a_1, \ldots, a_{t^*}$, $b_1, \ldots, b_{w-w^*}$ imaju koju od vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l-1$, osim ako su svi ti eksponenti jednaki 0, to je broj svih dvoličnih kompleksa u $K(\sqrt[l^m]{\mu})$ jednak l^{na}, gdje je

$$a = t + v - m - 1.$$

U svakom je dakle slučaju sigurno

$$a \leqq t + v - m - 1,$$

kao što tvrdi 10. poučka.

§ 7.

O primarnim i hiperprimarnim idealima i brojevima.

Definicija. Ako je $\mathfrak{a}$ kojigod ideal u k prost prema l, za koji je $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{a}}\right)_n = +1$, uzeli mi kojugod jedinicu tijela k za ε, zvat ćemo $\mathfrak{a}$ primarnim idealom l^m-toga stepena.

Definicija. Ako je α kojigod cijeli broj tijela k prost prema l, za koji je relativna diskriminanta $D\sqrt[l^m]{\alpha,\ k}$ prosta prema l, zvat ćemo α primarnim brojem l^m-toga stepena u k.

Definicija. Neka budu $\mathfrak{l}_1, \ldots, \mathfrak{l}_s$ svi među sobom različiti prosti ideali tijela k, štono su sadržani kao faktori u $1-\zeta_n$, i to po redu u l_1-toj, ..., l_s-toj potenciji, tako da je

$$(1-\zeta_n) = \mathfrak{l}_1^{l_1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s}.$$

Nadalje neka bude

$$\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1), \ldots, \mathfrak{l}_s^{hh'} = (\lambda_s),$$

gdje nam $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ znače cijele brojeve u k.

Digitized by Google

Ako je tada $\mathfrak{a}$ primaran ideal l^n-toga stepena, za koji valjaju jednadžbe

$$\left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{a}}\right)_n = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, s),$$

zvat ćemo $\mathfrak{a}$ hiperprimarnim idealom l^n-toga stepena.

Definicija. Napokon ćemo zvati broj α hiperprimarnim brojem l^n-toga stepena u k, ako je taj broj α prost prema $1-\zeta_n$ i kongruentan l^n-toj potenciji cijela broja tijela k s obzirom na modul

$$l_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1} \ldots l_z^{l_z[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}.$$

§ 8.

Osobito svojstvo primarnih prostih ideala.

Prije nego prijeđemo k istraživanju primarnih prostih ideala, dokazat ćemo dvije poučke, kojima se kanimo poslužiti.

11. poučka. Ako je μ makar koji cijeli broj, a $\mathfrak{p}$ kojigod prosti ideal tijela k, koji nije sadržan kao faktor ni u l ni u μ, to valja za svaki cijeli racionalni eksponenat e kongruencija

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}^e}\right)_n \equiv \mu^{\frac{n_k(\mathfrak{p}^e)}{l^n}}, \ (\mathfrak{p}),$$

gdjeno je n_k norma uzeta u tijelu k.

Dokaz. Budući da je u tijelu k sadržano tijelo l^n-tih kružnih jedinica $k(\zeta_n)$, djeljiv je broj $n_k(\mathfrak{p})-1$ sa l^n, pak je poradi toga

$$\frac{n_k(\mathfrak{p}^e)}{n(\mathfrak{p})-1}\,\frac{1}{} = n_k^{e-1}(\mathfrak{p}) + n_k^{e-2}(\mathfrak{p}) + \ldots + n_k(\mathfrak{p}) + 1 \equiv e, \ (l^n).$$

Stoga je

Digitized by Google

$$\mu^{\frac{n_k(\mathfrak{p}^e)-1}{l^n}} \equiv \mu^{\frac{n(\mathfrak{p})-1}{l^n}\cdot e} \equiv \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_n^e \equiv \left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}^e}\right)_n, \quad (\mathfrak{p}),$$

a to je trebalo dokazati.

S pomoću te poučke dokazat ćemo lako ovu:

12. poučka. Neka bude $\mathfrak{r}$ kojigod prosti ideal tijela k, koji nije sadržan u l, a $n_{k,\bar{k}}(\mathfrak{r})$ relativna norma toga ideala $\mathfrak{r}$ uzeta u k s obzirom na tijelu k podređeno tijelo $\bar{k}$, koje u sebi sadržava tijelo l^n-tih kružnih jedinica. Ako je tada $\bar{\mu}$ makar koji cijeli broj u k, koji je prost prema l i prema $\mathfrak{r}$, valja jednadžba

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{n_{k,\bar{k}}(\mathfrak{r})}\right)_{n,\bar{k}} = \left(\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{r}}\right)_{n,k},$$

gdje indeks $\bar{k}$ kaže, da simbol treba uzeti u tijelu $\bar{k}$, a indeks k da simbol, ispod koga on stoji, valja uzeti u tijelu k.

Dokaz. Postoji jednadžba

$$n_{\bar{k}}\left(n_{k,\bar{k}}(\mathfrak{r})\right) = n_k(\mathfrak{r}).$$

Budući pak da je $n_{k,\bar{k}}(\mathfrak{r})$ potencija prosta ideala u $\bar{k}$, dobivamo s pomoću 11. poučke, da je

$$\left(\frac{\bar{\mu}}{\mathfrak{r}}\right)_{n,k} \equiv \bar{\mu}^{\frac{n_k(\mathfrak{r})-1}{l^n}} \equiv \bar{\mu}^{\frac{n_{\bar{k}}(n_{k,\bar{k}}(\mathfrak{r}))-1}{l^n}} \equiv \left(\frac{\bar{\mu}}{n_{k,\bar{k}}(\mathfrak{r})}\right)_{n,\bar{k}}, \quad (\mathfrak{r}),$$

a tim je 12. poučka dokazana.

Prelazimo k istraživanju primarnih prostih ideala, te ćemo dokazati ovu važnu poučku:

13. poučka. Ako je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^n-toga stepena u tijelu k, uvijek se dade naći primaran broj l^n-toga stepena π u tijelu k tako, da bude $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$.

Digitized by Google

Dokaz. Dokazujući tu poučku poslužit ćemo se potpunom indukcijom. Dokazat ćemo ponajprije poučku za proste ideale l^2-toga stepena. Kad pak bude poučka dokazana za taj slučaj, moći ćemo razviti svu teoriju, što još dolazi, za tijelo $K(\sqrt[l^2]{\mu})$; napose poučke 21. i 30. Na temelju razvite teorije relativno cikličnoga tijela $K(\sqrt[l^2]{\mu})$ moći ćemo tada na posve analogan način dokazati 13. poučku za primarne proste brojeve $\mathfrak{p}$ l^3-toga stepena i t. d.; napokon ćemo uopće na temelju teorije relativno cikličnoga tijela $K(\sqrt[l^{n-1}]{\mu})$ dokazati 13. poučku za primarne proste ideale $\mathfrak{p}$ l^n-toga stepena.

Dokaz će nam se u svakom slučaju sastojati iz dva dijela. Tako ćemo 13. poučku dokazati najprije za takove primarne proste ideale l^2-toga stepena, koji su ujedno hiperprimarni ideali l-toga stepena. Za takove ćemo proste ideale razviti poučku 21., a na temelju te poučke onda izvesti dokaz za ostale primarne proste ideale $\mathfrak{p}$ l^2-toga stepena. U daljem razvijanju dokazat ćemo poučku opet ponajprije za takove primarne proste ideale $\mathfrak{p}$ l^3-toga stepena, koji su ujedno hiperprimarni ideali l^3-toga stepena, pak za takove proste ideale razviti 21. poučku, a onda na temelju te poučke izvesti dokaz 13. poučke za ostale primarne proste ideale $\mathfrak{p}$ l^3-toga stepena. I t. d.

Uzmimo dakle ponajprije, da je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^2-toga stepena, koji je uz to hiperprimaran ideal l-toga stepena.

Uvijek ćemo tada moći odrediti u tijelu k hiperprimaran broj π^* l-toga stepena tako, da bude $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*)$. Predočuje li $\mathfrak{l}$ prost ideal tijela k sadržan u broju $1-\zeta_n$, to se $\mathfrak{l}$ raspada u tijelu $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ na l među sobom različitih prostih ideala. Označimo li jedan od tih prostih ideala sa $\bar{\mathfrak{l}}$, to je svaki cijeli broj tijela $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ kongruentan cijelomu broju tijela k s obzirom na svaku potenciju $\bar{\mathfrak{l}}^e$ prostoga ideala $\bar{\mathfrak{l}}$. Napose se dade naći cio broj α u k tako, da bude

$$\sqrt[l]{\pi^*} \equiv \alpha, \qquad (\bar{\mathfrak{l}}^e).$$

Digitized by Google

Odavde izlazi, da je

$$\alpha^{l-1}\sqrt[l]{\pi^*} \equiv \varkappa^l, \quad (\mathfrak{l}^e).$$

Za svaki se dakle prosti ideal $\mathfrak{l}$ tijela $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ sadržan u $1-\zeta_n$ dade naći cio broj ω u tijelu k tako, da bude $\omega\sqrt[l]{\pi^*}$ kongruentno l-toj potenciji cijela broja tijela k s obzirom na kojugod potenciju prostoga ideala $\mathfrak{l}$. Iz toga se lako dade zaključiti, da će se dati odrediti cio broj ω u tijelu k tako, da bude valjana kongruencija

$$\omega\sqrt[l]{\pi^*} \equiv \alpha^l, \quad \left((1-\zeta_1)^l\right), \tag{1}$$

gdjeno je α cio broj u k.

Označimo li sada sa $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{m-1}$ sustav neovisnih jedinica u k, a sa ε_m korijen jedinice u k, kojega l-ti korijen više ne leži u k, pa odredimo li proste ideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ u k tako, da bude

$$\left(\frac{\pi^*}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = \zeta_2, \quad \left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = \zeta_2^{(s)}, \quad \left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \quad (t \neq s), \tag{2}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m),$$

gdje su ξ, $\xi_s^{(s)}$ primitivni l^2-ti korijeni jedinice, i stavimo li

$$\mathfrak{q}_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1, 2, \ldots, m)$$

tako, da budu $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ cijeli brojevi u k, dat će se naći za cijeli broj ω kongruencija od oblika

$$\omega \equiv \varepsilon\, \varkappa_1^{u_1} \ldots \varkappa_m^{u_m}\, \alpha^l, \quad \left((1-\zeta_1)^l\right),$$

gdje je ε jedinica, α cio broj u k, a eksponenti $u_1, \ldots, u_m$ imaju izvjesne između vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l-1$.

Prema tomu možemo kongruenciju (1) napisati također ovako:

Digitized by Google

$$\varepsilon \varkappa_1^{u_1} \dots \varkappa_m^{u_m} \sqrt[l]{\pi^*} \equiv \beta^l, \quad \left((1-\zeta_1)^l\right),$$

gdjeno je β cio broj u k.

Ako su sada svi eksponenti $u_1, \dots, u_m$ jednaki 0, to je $\pi = \varepsilon^l \pi^*$ primaran broj l^2-toga stepena u k. Uzmimo naprotiv, da nijesu svi ti eksponenti $u_1, \dots, u_m$ jednaki 0, nego da su eksponenti $u_1, \dots, u_e$ jednaki 1, a ostali jednaki 0. Budući da je

$$\varepsilon \varkappa_1^{u_1} \dots \varkappa_e^{u_e} \sqrt[l]{\pi^*} = \bar{\pi}$$

primaran broj l-toga stepena u tijelu $K(\sqrt[l]{\pi^*})$, to mora biti, kako je broj razreda u $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ prost prema l,

$$\prod_{\mathfrak{w}}{}' \left(\frac{\bar{\nu}, \bar{\pi}}{\mathfrak{w}}\right) = +1, \tag{3}$$

gdje je $\bar{\nu}$ kojigod cijeli broj tijela $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ prost prema l, a produkt valja protegnuti na sve proste ideale tijela $K(\sqrt[l]{\pi^*})$, koji nijesu sadržani kao faktori u l.

Svaka je jedinica ε tijela k jednaka relativnoj normi $N_{\sqrt[l]{\pi^*},\, k}$ jedinice $\bar{\varepsilon}$ tijela $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ tako, te možemo staviti

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} \cdot S\bar{\varepsilon} \cdot S^2\bar{\varepsilon} \dots\dots S^{l-1}\bar{\varepsilon}.$$

Poradi (2) mora biti

$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\dfrac{\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = \left(\dfrac{S\bar{\varepsilon}}{\mathfrak{q}_s}\right)_2, \\ (s = 1, 2, \dots, m), \\ \left(\dfrac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_2 = \left(\dfrac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_2, \end{array} \right. \tag{4}$$

Digitized by Google

ako je $\bar{\mathfrak{p}}$ prost ideal tijela $K(\sqrt[l]{\pi^*})$ sadržan u $\mathfrak{p}$. Kako je pak

$$\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{r}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \left(\frac{\varepsilon}{N_{\sqrt[l]{\pi^*}}(\bar{\mathfrak{r}})}\right)_{2,\ k},$$

ako je $\bar{\mathfrak{r}}$ kojigod prost ideal u $K(\sqrt[l]{\pi^*})$, to ćemo iz (2) zaključiti, da je

$$(5)\quad \begin{cases} \left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} \left(\frac{S\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} \cdots \left(\frac{S^{l-1}\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \xi_1^{(s)} \neq 1, \\ \left(\frac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} \left(\frac{S\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} \cdots \left(\frac{S^{l-1}\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2\ \sqrt[l]{\pi^*}} = +1, \end{cases}$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m),$$

$$(6)\quad \left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} \left(\frac{S\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} \cdots \left(\frac{S^{l-1}\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = +1,$$

gdjeno stavismo $\varepsilon_s = N_{\sqrt[l]{\pi^*},\ k}(\bar{\varepsilon}_s)$, a $\xi_1^{(s)}$ nam predočuje primitivan l-ti korijen jedinice.

Poradi (5), (6) izlaze s obzirom na (4) relacije

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \xi_2^{(s)}, \quad \left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \xi_1^{(s)}, \quad (t \neq s),$$

$$(s = 1, 2, \ldots, e),$$

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi^*}} = \xi_1,$$

gdjeno je ξ_2 primitivan l^2-ti, a ξ_1 izvjestan l-ti korijen jedinice.

Dignemo li te relacije na l-tu potenciju, izići će nam jednadžbe

Digitized by Google

$$(7)\quad \begin{cases} \left(\frac{\bar{\varepsilon}_s}{q_s}\right)_{\sqrt[l]{\pi^*}} = \zeta_1^{(s)}, \quad \left(\frac{\bar{\varepsilon}_t}{q_s}\right)_{\sqrt[l]{\pi^*}} = +1, \quad (t \neq s), \\ \qquad\qquad (s = 1, 2, \ldots, e), \\ \left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l]{\pi^*}} = +1, \end{cases}$$

gdje smo sa $\zeta_1^{(s)}$ označili primitivan l-ti korijen jedinice.

Uvedemo li sada za $\bar{\nu}$ u (3) po redu jedinice $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_e$, uvjerit ćemo se lako, da svi eksponenti $u_1, \ldots, u_e$ poradi relacija (7) moraju biti jednaki 0.

Tim je 13. poučka za ovaj posebni slučaj dokazana. Pod učinjenom pretpostavkom uvijek ćemo moći naći primaran broj l^2-toga stepena π u k tako, da bude $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$.

Na temelju toga dade se dokazati, da za takove proste ideale $\mathfrak{p}$ valja 21. poučka, a tim ćemo se odmah poslužiti.

Ako primarni prosti ideal $\mathfrak{p}$ l^2-toga stepena nije ujedno hiperprimaran ideal l-toga stepena, mi ćemo, da dokažemo 13. poučku, postupati ovako:

Prema učinjenoj pretpostavci o prostom idealu $\mathfrak{p}$ moći ćemo uvijek naći u tijelu k primaran broj π_1 l-toga stepena, tako da bude $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi_1)$. Broj je idealskih razreda h_1 u tijelu $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ prost prema l.

U tijelu $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ ima osim među sobom neovisnih jedinica $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ tijela k još $m' = m(l-1)$ jedinica $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_{m'}$, koje sa jedinicama $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ čine sustav između sebe neovisnih jedinica, tako da se svaka jedinica $\bar{\varepsilon}$ tijela $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ dade prikazati u obliku

$$(8)\quad \bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}_1^{a_1} \ldots \bar{\varepsilon}_m^{a_m} \varepsilon_1^{b_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{b_{m'}} \bar{\eta}^l,$$

gdjeno eksponenti $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_{m'}$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l-1$, a $\bar{\eta}$ predočuje jedinicu u $K(\sqrt[l]{\pi_1})$.

Digitized by Google

Odredimo proste ideale $\bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{m'}$ u tijelu $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ tako, da bude

$$(9)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt[l]{\pi_1}}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \ldots, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_m}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \\ \left(\dfrac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = \zeta_2^{(s)}, \quad \left(\dfrac{\bar{\varepsilon}_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \quad (t \neq s), \\ \left(\dfrac{\lambda_1}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1, \ldots, \quad \left(\dfrac{\lambda_g}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1, \\ (s = 1, 2, \ldots, m'; \quad t = 1, 2, \ldots, m'), \end{cases}$$

gdje je $\zeta_2^{(s)}$ primitivan l^2-ti korijen jedinice, a

$$\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1), \ldots, \mathfrak{l}_g^{hh'} = (\lambda_g).$$

To je uvijek moguće, jer svaki prosti ideal $\mathfrak{l}$ tijela k, koji je sadržan u l, ostaje u tijelu $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ nerastvoren poradi pretpostavke o idealu $\mathfrak{p}$.

Stavimo li

$$N_{\sqrt[l]{\pi_1},\, k}^{\;l}(\bar{\mathfrak{q}}_s) = \mathfrak{q}_s,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m'),$$

lako se uvjerimo, da iz (9) izlaze jednadžbe

$$(10)\quad \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \quad \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \ldots, \quad \left(\frac{\varepsilon_m}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1,$$
$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1, \ldots, \quad \left(\frac{\lambda_g}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m').$$

Prema tomu su prosti ideali $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ primarni ideali l^2-toga stepena, a uz to hiperprimarni ideali l-toga stepena. Ako stavimo

$$\mathfrak{q}_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1, 2, \ldots, m'),$$

Digitized by Google

tako da budu $\varkappa_s$ primarni brojevi l^2-toga stepena, valja prema gore razvijenomu posebni zakon recipročnosti

$$\left(\frac{\pi_1}{q_s}\right)_2 \left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_2^{-1} = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m').$$

Odavde zaključujemo, da je poradi (10)

$$\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_2 = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m').$$

No tada je svakako i

$$\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi_1}} = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m'),$$

ili

$$\left(\frac{N_{\sqrt[l]{\pi}\ k}(\bar{\varkappa}_s)}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{2,\ \sqrt[l]{\pi_1}} = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m').$$

Budući pak da je

$$\left(\frac{\bar{\varkappa}_s}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_2 = \left(\frac{S\bar{\varkappa}_s}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_2, \quad (s = 1, 2, \ldots, m'),$$

moraju biti simboli $\left(\frac{\bar{\varkappa}_s}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_2$ jednaki l-tomu korijenu jedinice, a stoga je

$$\left(\frac{\bar{\varkappa}_s}{\bar{\mathfrak{p}}}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m). \tag{11}$$

No dade se odrediti jedinica $\bar{\varepsilon}$ u $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ tako, da bude $\bar{\varepsilon}\sqrt[l]{\pi_1}$ primaran broj u $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ l-toga stepena, te je tada po zakonu recipročnosti za ostatke l-tih potencija u tijelu $K(\sqrt[l]{\pi_1})$

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}\sqrt[l]{\pi_1}}{\bar{q}_s}\right)\left(\frac{\bar{\varkappa}_s}{\bar{\mathfrak{p}}}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m).$$

Digitized by Google

Prikažemo li sada $\bar{\varepsilon}$ u obliku (8), pa obazremo li se na (11), dobit ćemo odatle relacije

$$\left(\frac{\varepsilon_1^{-a_1} \ldots \varepsilon_m^{-a_m} \varepsilon_1^{b_1} \ldots \varepsilon_m^{b_m} \sqrt[l]{\pi_1}}{\bar{\mathfrak{q}}_s} \right) = +1,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m).$$

Iz tih relacija izlazi, da moraju poradi (9) eksponenti $a_1, \ldots, a_m$ svi biti jednaki 0. Dakle je $\pi = \varepsilon_1^{b_1 l} \ldots \varepsilon_m^{b_m l} \pi_1$ primaran broj l^2-toga stepena u k.

Na temelju netom dokazane poučke možemo sada razviti svu teoriju relativno cikličnoga tijela $K(\sqrt[l^2]{\mu})$, kao što je prikazano u ovoj radnji od § 9. do kraja. Uzet ćemo, da smo to i učinili, pak nastaviti dokaz 13. poučke ovako:

Neka bude opet ponajprije $\mathfrak{p}$ primaran ideal l^3-toga, a uz to hiperprimaran ideal l^2-toga stepena; onda za nj valja 30. poučka. Stoga ćemo moći broj π_1 odrediti tako, da on bude hiperprimaran broj l^2-toga stepena i da zadovolji jednadžbu $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi_1)$.

Prema tomu će se svaki prosti ideal $\bar{\mathfrak{l}}$ tijela $K(\sqrt[l]{\pi_1})$ raspasti u tijelu $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$ na l među sobom različitih prostih ideala $\bar{\mathfrak{l}}$. Zaključujući kao prije uvjerit ćemo se lako, da se u našem slučaju dade odrediti cio broj ω u k tako, da bude valjana kongruencija

$$\omega \sqrt[l^2]{\pi} \equiv \alpha^l, \quad \left((1-\zeta_1)^l\right),$$

gdje je α cio broj u k.

Odredimo sada proste ideale $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$ u k tako, da budu valjane relacije

Digitized by Google

$$\left(\frac{\pi_1}{q_s}\right)_3 = \xi_3\,, \quad \left(\frac{\varepsilon_s}{q_s}\right)_3 = \xi_3^{(s)}, \quad \left(\frac{\varepsilon_t}{q_s}\right)_3 = +1, \qquad (t \neq s),$$
$$(s,\ t = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

gdjeno su ξ_3, $\xi_3^{(s)}$ primitivni l^3-ti korijeni jedinice.

Stavimo li tada

$$q_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

gdjeno su $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ cijeli brojevi u k, moći ćemo za ω napisati kongruenciju od oblika

$$\omega \equiv \varepsilon\, \varkappa_1^{u_1} \ldots \varkappa_m^{u_m}\, \alpha^l, \quad \left((1-\zeta_1)^l\right),$$

gdje je ε jedinica, α cio broj u k, a eksponenti $u_1, \ldots, u_m$ imaju izvjesne između vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l—1.

Prema tomu bi bio broj

$$\varepsilon\, \varkappa_1^{u_1} \ldots \varkappa_m^{u_m} \sqrt[l^2]{\pi_1} = \pi$$

primaran broj l-toga stepena u tijelu $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$, pak bi u $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$ valjala jednadžba

$$\prod_{\mathfrak{w}}{}' \left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{w}}\right) = +1 \tag{12}$$

za svaki cijeli broj ν tijela $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$, ako se produkt protegne na sve proste ideale $\mathfrak{w}$ tijela $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$, koji nijesu sadržani u l.

Budući da je $\sqrt[l]{\pi_1}$ primaran broj l-toga stepena u $K(\sqrt[l]{\pi_1})$, to je broj idealskih razreda u $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$ broj prost prema l. Svaka je

Digitized by Google

jedinica tijela k jednaka relativnoj normi $N_{\sqrt[l^2]{\pi_1}, k}$ jedinice tijela $K(\sqrt[l^2]{\pi_1})$.

Ako stavimo

$$\varepsilon_s = N_{\sqrt[l^2]{\pi_1}, k}(\varepsilon_s), \quad (s = 1, 2, \ldots, m),$$

uvjerit ćemo se, postupamo li kao gore (isp. (4)) s pomoću 12. poučke, da poradi (10) valjaju ove relacije:

$$(13) \qquad \left(\frac{\varepsilon_s}{q_s}\right)_{3,\, \sqrt[l^2]{\pi^*}} = \xi_s^{(s)}, \quad \left(\frac{\varepsilon_t}{q_s}\right)_{3,\, \sqrt[l^2]{\pi^*}} = 1, \quad (t \neq s),$$

$$(s, t = 1, 2, \ldots, m)$$

$$\left(\frac{\bar{\varepsilon}}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{3,\, \sqrt[l^2]{\pi^*}} = +1,$$

gdjeno je $\xi_s^{(s)}$ primitivan l^3-ti korijen jedinice, a ε makar koja jedinica u $K(\sqrt[l^2]{\pi^*})$.

Dignemo li te relacije na l^2-tu potenciju, izići će nam jednadžbe

$$\left(\frac{\varepsilon_s}{q_s}\right)_{\sqrt[l^2]{\pi^*}} = \xi_1^{(s)}, \quad \left(\frac{\varepsilon_t}{q_s}\right)_{\sqrt[l^2]{\pi^*}} = +1, \quad (t \neq s),$$

$$(s, t = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\left(\frac{\varepsilon}{\bar{\mathfrak{p}}}\right)_{\sqrt[l^2]{\pi^*}} = +1,$$

gdje smo sa $\xi_1^{(s)}$ označili primitivan l-ti korijen jedinice.

Uvedemo li sada za ν u (12) po redu jedinice $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, uvjerit ćemo se, da svi eksponenti $u_1, \ldots, u_m$ poradi relacija (13) moraju biti jednaki 0; dakle je $\pi = \varepsilon^{l^2}\pi^*$ primaran broj l^3-toga stepena.

Digitized by Google

Tim je 13. poučka i za taj slučaj dokazana. Pod učinjenom pretpostavkom uvijek ćemo moći naći primaran broj l^s-toga stepena π tako, da bude $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$.

Na temelju toga dade se dokazati, da za takove proste ideale $\mathfrak{p}$ valja 21. poučka, a tim ćemo se odmah poslužiti.

Ako je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^s-toga stepena, koji nije hiperprimaran ideal l^s-toga stepena, moći ćemo prema onome, što smo gore već dokazali, odrediti primaran broj l^s-toga stepena π^* u k tako, da bude $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi^*)$. Broj je idealskih razreda h_s u tijelu $K(\sqrt[l^s]{\pi^*})$ broj prost prema l.

Osim jedinica neovisnih među sobom $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ tijela k ima u tijelu $K(\sqrt[l^s]{\pi^*})$ još $m' = m(l^s-1)$ jedinica $\bar{\varepsilon}_1, \ldots, \bar{\varepsilon}_{m'}$, koje sa jedinicama $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ čine sustav jedinica neovisnih između sebe, tako da se svaka jedinica $\bar{\varepsilon}$ tijela $K(\sqrt[l^s]{\pi})$ dade prikazati u obliku

$$\varepsilon = \varepsilon_1^{a_1} \ldots \bar{\varepsilon}_{m'}^{a_{2m}} \varepsilon_1^{b_1} \ldots \varepsilon_m^{b_m} \bar{\eta}^l, \tag{14}$$

gdjeno eksponenti $a_1, \ldots, a_{m'}, b_1, \ldots, b_m$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l-1$, a $\bar{\eta}$ predočuje jedinicu u $K(\sqrt[l^s]{\pi})$.

Odredimo proste ideale $\bar{\mathfrak{q}}_1, \ldots, \bar{\mathfrak{q}}_{m'}$ u $K(\sqrt[l^s]{\pi})$, da budu valjane relacije

$$\left\{\begin{array}{l} \left(\dfrac{\sqrt[l^s]{\pi}}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1, \ldots, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_m}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1, \\ \qquad\qquad \left(\dfrac{\bar{\varepsilon}_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = \xi_3^{(s)}, \quad \left(\dfrac{\varepsilon_t}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1, \ (t \neq s), \\ \left(\dfrac{\lambda_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \ldots, \left(\dfrac{\lambda_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \\ \qquad (s, t = 1, 2, \ldots, m'). \end{array}\right. \tag{15}$$

*

Digitized by Google

Stavimo li sada

$$N_{\substack{l^2 \\ \sqrt{\pi},\, k}}(\mathfrak{q}_s) = \mathfrak{q}_s, \quad (s = 1, 2, \ldots, m'),$$

lako se možemo uvjeriti, da iz (15) izlaze jednadžbe

$$(16) \qquad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1, \left(\frac{\varepsilon_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_m}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 = +1,$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1, \ldots, \left(\frac{\lambda_z}{\mathfrak{q}_s}\right)_2 = +1,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m').$$

Prema tomu su prosti ideali $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_{m'}$ primarni ideali l^3-toga stepena, a uz to hiperprimarni ideali l^2-toga stepena. Ako stavimo

$$\mathfrak{q}_s^{hh'} = (\varkappa_s), \quad (s = 1, 2, \ldots, m'),$$

tako da budu $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_{m'}$ primarni brojevi l^3-toga stepena, valja prema onome, što je gore razvijeno, posebni zakon recipročnosti

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}_s}\right)_3 \left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_3^{-1} = +1,$$

$$(s = 1, 2, \ldots, m').$$

Odavde zaključujemo, da je poradi (16)

$$\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_3 = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m').$$

No tada je svakako i

$$\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_{3,\ \frac{l^2}{\sqrt{\pi}}} = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m')$$

ili

$$\left(\frac{N_{\substack{l^2 \\ \sqrt{\pi},\, k}}(\varkappa_s)}{\mathfrak{p}}\right)_{3,\ \frac{l^2}{\sqrt{\pi}}} = +1, \ (s = 1, 2, \ldots, m').$$

Digitized by Google

Budući pak da je

$$\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_3 = \left(\frac{S\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_3, \quad (s = 1, 2, \ldots, m'),$$

moraju biti simboli $\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right)_3$ jednaki l^2-tomu korijenu jedinice, a stoga je

$$(17) \qquad \left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m').$$

No dat će se odrediti jedinica ε u $K(\sqrt[l^2]{\pi^*})$ tako, da bude $\varepsilon \sqrt[l^2]{\pi}$ primaran broj u $K(\sqrt[l^2]{\pi^*})$ l-toga stepena. Onda je po zakonu recipročnosti za ostatke l-tih potencija u tijelu $K(\sqrt[l^2]{\pi^*})$

$$\left(\frac{\varepsilon \sqrt[l^2]{\pi}}{\mathfrak{q}_s}\right)\left(\frac{\varkappa_s}{\mathfrak{p}}\right) = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m').$$

Prikažemo li sada ε u obliku (14), pa obazremo li se na (17), dobit ćemo odatle relacije

$$\left(\frac{\varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_{m'}^{a_{m'}} \varepsilon_1^{b_1} \ldots \varepsilon_m^{b_m} \sqrt[l^2]{\pi}}{\mathfrak{q}_s}\right) = +1,$$
$$(s = 1, 2, \ldots, m').$$

Iz tih relacija izlazi, da poradi (15) moraju biti svi eksponenti $a_1, \ldots, a_{m'}$ jednaki 0. Dakle je $\pi = \varepsilon_1^{b_1 l^2} \ldots \varepsilon_m^{b_m l^2} \pi^*$ primaran broj l^2-toga stepena u k.

Ako je $n > 3$, nastavit ćemo započeti postupak, te ćemo se postepeno uvjeravati o ispravnosti 13. poučke, kakavgod bio broj n.

Digitized by Google

§ 9.

O kongruencijama s obzirom na module

$$\Lambda_n = (1-\zeta_n)^{nl^n-(n-1)l^{n-1}} \text{ i}$$

$$\Lambda'_n = \mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1} \dots \mathfrak{l}_z^{l_z[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}.$$

Neka bude k kojegod imaginarno brojno tijelo, u kom je sadržano tijelo l^n-tih kružnih jedinica $k(\zeta_n)$; uz k neka budu i sva sa k konjugirana tjelesa imaginarna. Relativni stepen tijela k s obzirom na $k(\zeta_n)$ obilježit ćemo sa m' tako, da je k od stepena $m'l^{n-1}(l-1)$, pak uvesti pokratu $m = \frac{m'}{2}$. Pod $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1}$ razumijevat ćemo potpun sustav temeljnih jedinica u tijelu k, a pod ε_m korijen jedinice, koji dolazi u k, no l-ti mu korijen više ne leži u k. Za prosti broj $1-\zeta_n = 1-e^{\frac{2\pi i}{l^n}}$ tijela $k(\zeta_n)$ neka vrijedi u tijelu k rastvor

$$1-\zeta_n = \mathfrak{l}_1^{l_1}\,\mathfrak{l}_2^{l_2} \dots \mathfrak{l}_z^{l_z},$$

pak neka bude

$$(\lambda_1) = \mathfrak{l}_1^{hh'}, \quad (\lambda_2) = \mathfrak{l}_2^{hh'}, \dots, (\lambda_z) = \mathfrak{l}_z^{hh'},$$

gdjeno su $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_z$ izvjesni cijeli brojevi u k, a h' cio racionalan broj određen prema kongruenciji

$$hh' \equiv 1, \quad (l^n).$$

Dokazat ćemo ovu poučku:

14. poučka. Ako za proste ideale $\mathfrak{q}_1, \dots, \mathfrak{q}_m$, koji nijesu sadržani kano faktori u $1-\zeta_n$, valjaju jednadžbe

Digitized by Google

$$\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{q}_s}\right)_n = \xi_n^{(s)}, \quad \left(\frac{\varepsilon_k}{\mathfrak{q}_s}\right)_n = +1, \quad (s \neq k),$$
$$(s, k = 1, 2, \ldots, m),$$

a za primarne proste ideale l^n-toga stepena jednadžbe

$$\left(\frac{\varepsilon_s}{\mathfrak{p}_k}\right)_n = +1, \quad (s = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, z),$$
$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_k}\right)_n = \zeta_n^{(k)}, \quad \left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}_l}\right)_n = +1, \quad (k \neq l),$$
$$(k, l = 1, 2, \ldots, z),$$

gdjeno su $\xi_n^{(s)}$ i $\zeta_n^{(k)}$ primitivni l^n-ti korijeni jedinice, pa ako stavimo

$$\mathfrak{q}_1^{hh'} = (\varkappa_1), \ \mathfrak{q}_2^{hh'} = (\varkappa_2), \ldots, \ \mathfrak{q}_m^{hh'} = (\varkappa_m);$$
$$\mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \ \mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2), \ldots, \ \mathfrak{p}_z^{hh'} = (\pi_z),$$

tako da budu $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$ cijeli brojevi, a $\pi_1, \ldots, \pi_z$ primarni brojevi l^n-toga stepena u k, to valja za svaki prema $1-\zeta_n$ prost cio broj ω u k s obzirom na modul $\Lambda_n = (1-\zeta_n)^{nl^n-(n-1)l^{n-1}}$ kongruencija

$$(1) \quad \omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z} \alpha^{l^n}, (\Lambda_n),$$

gdjeno treba eksponentima $u_1, \ldots, u_m$, $v_1, \ldots, v_m$ podijeliti izvjesne vrijednosti 0, 1, 2, ..., l^n-1, a eksponentima $w_1, \ldots, w_z$ vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l^{n-1}-1$, pod α pak razumjeti zgodan cio broj tijela k.

Dokaz. Lako je uvidjeti, da broj

$$\mu = \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z},$$

Digitized by Google

gdjeno eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ imaju kojegod između vrijednosti 0, 1, 2, ..., l^n-1, a eksponenti $\pi_1, \ldots, \pi_z$ kojegod između vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l^{n-1}-1$, ne može drukčije biti kongruentan l^n-toj potenciji cijeloga broja u k s obzirom na modul Λ_n, nego da budu svi eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_z$ jednaki 0.

Ako je bar jedan između eksponenata $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_z$ prost prema l, ne može μ biti kongruentan l^n-toj potenciji cijeloga broja u k već poradi toga, što

$$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z}$$

ne može da bude kongruentan l-toj potenciji cijeloga broja u k s obzirom na modul Λ_1', ako eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_z$ imaju koju od vrijednosti 0, 1, 2, ..., $l-1$, osim ako su svi ti eksponenti jednaki 0 (H. Rq. Z. § 30; F. § 18). Ako su pak svi eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_z$ djeljivi sa l^k, $(k < n)$, ali ne više sa l^{k+1}, stavit ćemo

$$u_1 = l^k a_1, \ldots, u_m = l^k a_m,$$
$$v_1 = l^k b_1, \ldots, v_m = l^k b_m,$$
$$w_1 = l^k c_1, \ldots, w_z = l^k c_z,$$

gdjeno među brojevima $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m, c_1, \ldots, c_z$ ima bar jedan, koji nije djeljiv sa l.

Uzmimo, da postoji kongruencija

$$(2) \quad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z} \equiv \alpha^{l^n}, \quad (\Lambda_n),$$

gdjeno eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ imaju koju od vrijednosti 0, 1, ..., l^n-1, eksponenti pak $w_1, \ldots, w_z$ koju od

Digitized by Google

vrijednosti $0, 1, \ldots, l^{n-1}-1$, a α označuje cio broj u k. Stavimo li za čas

$$\varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_m^{a_m} \chi_1^{b_1} \ldots \chi_m^{b_m} \pi_1^{c_1} \ldots \pi_z^{c_z} = \nu,$$

moći ćemo (2) napisati i ovako:

$$(3) \qquad \prod_0^{l-1} \left| e \right| \left(\nu^{l^{k-1}} - \zeta_n^{(n-1)e\,\alpha^{l^{n-1}}} \right) \equiv 0, \quad (\Lambda_n).$$

Ako je l_s kojigod između prostih ideala $l_1, \ldots, l_z$, zaključit ćemo, da poradi (3) jedan između faktora lijeve strane mora da bude djeljiv sa $l_s^{[nl^{n-1}+(n-1)l^{n-2}]}$. Neka je to n. pr. faktor

$$\nu^{l^{k-1}} - \zeta_n^{(n-1)e'\,\alpha^{l^{k-1}}}.$$

No tada bi morali ostali faktori produkta u (3) biti djeljivi točno sa $l_s^{l^{n-1}}$, a odatle izlazi, da je faktor $\nu^{l^{k-1}} - \zeta_n^{(n-1)e'\,\alpha^{l^{n-1}}}$ djeljiv sa $l_s^{[(n-1)l^n-(n-2)l^{n-1}]}$. Valjala bi dakle kongruencija

$$\nu^{l^{k-1}} \equiv \beta^{l^{n-1}}, \quad \left([l_s^{[(n-1)l^n-(n-2)l^{n-1}]} \right),$$

gdje je β cio broj u k.

Nastavimo li taj postupak, uvjerit ćemo se, da se dadu naći kongruencije od oblika

$$\nu \equiv \alpha^{l^{n-k}}, \quad \left([l_s^{[(n-k)l^n-(n-k\ \ 1)l^{n-1}]} \right),$$
$$(s = 1, 2, \ldots, z),$$

gdjeno su $\alpha_1, \ldots, \alpha_z$ cijeli brojevi u k. No poradi toga postoji uvijek cio broj γ u k, za koji je

Digitized by Google

$$\nu \equiv \gamma^{l^{n-k}}, \quad \left((1-\zeta_n)^{(n-k)l^n-(n-k-1)l^{n-1}}\right).$$

Budući pak da je bar jedan između eksponenata $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$, $c_1, \ldots, c_z$ prost prema l, ne može ta kongruencija postojati drukčije, nego da budu svi ti eksponenti $a_1, \ldots, a_m$, $b_1, \ldots, b_m$, $c_1, \ldots, c_z$ jednaki 0.

Tim je naša tvrdnja o broju μ dokazana.

Stavit ćemo sada

$$L_1 = n\left(\mathfrak{l}_1^{l_1 l^{n-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{n(\mathfrak{l}_1)}\right),$$

gdje nam n nadaje normu uzetu u tijelu k, pa neka nam

$$\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(L_1)} \tag{4}$$

predočuje potpun sustav cijelih prema $\mathfrak{l}_1$ prostih, a s obzirom na modul $\mathfrak{l}_1^{l_1 l^{n-1}}$ inkongruentnih brojeva tijela k, koji su osim toga svi kongruentni 1 s obzirom na modul $\mathfrak{l}_2^{l_2 l^{n-1}} \mathfrak{l}_3^{l_3 l^{n-1}} \ldots \mathfrak{l}_z^{l_z l^{n-1}}$. Budući da je općeno

$$\alpha_1^{(k)} \not\equiv \zeta_n^e \alpha_1^{(k)}, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1 l^{n-1}}\right),$$

$$(k = 1, 2, \ldots, L_1, \quad e = 1, 2, \ldots, l^{n-1}-1),$$

ako je ζ_n primitivan l^n-ti korijen jedinice, moći ćemo iz sustava (4) odabrati $\frac{L_1}{l^{n-1}}$ brojeva n. pr.

$$\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{l^{n-1}}\right)}$$

tako, da broja $\zeta_n^e \alpha_1^{(k)}$ u tom sustavu nema, ako je $\alpha_1^{(k)}$ kojigod broj toga sustava, a e makar koja između vrijednosti

$$1, 2, \ldots, l^{n-1}-1.$$

Digitized by Google

Stavimo nadalje

$$L_2 = n\left(l_2^{l_2 l^{n-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{n(l_2)}\right),$$

pa neka bude

$$\alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_2^{(L_2)} \tag{5}$$

potpun sustav cijelih prema l_2 prostih, a s obzirom na modul $l_2^{l_2 l^{n-1}}$ inkongruentnih brojeva tijela k, koji su osim toga svi kongruentni 1 s obzirom na modul $l_1^{l_1 l^{n-1}} l_3^{l_3 l^{n-1}} \ldots l_z^{l_z l^{n-1}}$. Iz sustava (5) moći ćemo kao u predašnjem slučaju izvaditi $\frac{L_2}{l^{n-1}}$ brojeva n. pr.

$$\alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{l^{n-1}}\right)} \tag{6}$$

tako, da broja $\zeta^e \alpha_2^{(k)}$ među tima brojevima više nema, ako je $\alpha_2^{(k)}$ kojigod između brojeva (6), a e makar koja između vrijednosti 1, 2, ..., $l^{n-1}-1$.

Analogno ćemo dalje postupati s prostim brojevima l_3, l_4 i t. d. Napokon ćemo odrediti zadnji sustav od $\frac{L_z}{l^{n-1}}$ brojeva

$$\alpha_z^{(1)}, \ldots, \alpha_z^{\left(\frac{L_z}{l^{n-1}}\right)}, \tag{7}$$

gdje je

$$L_z = n\left(l_z^{l_z l^{n-1}}\right)\left(1 - \frac{1}{n(l_z)}\right),$$

a među brojevima (7) broja $\zeta^e \alpha_z^{(k)}$ nema, ako je $\alpha_z^{(k)}$ kojigod između brojeva (7), a e makar koja od vrijednosti 1, 2, ..., $l^{n-1}-1$.

Digitized by Google

Izraz

$$(8)\quad \varepsilon_1^{u_1}\overset{u_m}{\ldots\varepsilon_m}\,\varkappa_1^{v_1}\overset{v_m}{\ldots\varkappa_m}\,\pi_1^{w_1}\overset{w_z}{\ldots\pi_z}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n}\left(\alpha_2^{(i_2)}\right)^{l^n}\ldots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n},$$

$$\left(\begin{matrix}u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_m=0,1,2,\ldots,l^n-1;\ w_1,\ldots,w_z=0,1,2,\ldots,l^{n-1}-1,\\ i_1=1,2,\ldots,\ \frac{L_1}{l^n-1},\ldots,\ i_z=1,2,\ldots,\ \frac{L_z}{l^n-1}\end{matrix}\right),$$

predočuje nam sustav od

$$l^{m'[nl^n-(n-1)l^{n-1}]}\left(1-\frac{1}{n(l_1)}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{n(l_z)}\right)$$

cijelih brojeva tijela k. Svi su ti brojevi prosti prema l i među sobom inkongruentni s obzirom na modul Λ_n. Zaista ako uzmemo, da su dva broja od oblika (8) kongruentna s obzirom na modul Λ_n, n. pr. da je

$$\varepsilon_1^{u_1}\overset{u_m}{\ldots\varepsilon_m}\,\varkappa_1^{v_1}\overset{v_m}{\ldots\varkappa_m}\,\pi_1^{w_1}\overset{w_z}{\ldots\pi_z}\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n}\ldots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n}$$

$$\equiv \varepsilon_1^{u_1'}\overset{u_m'}{\ldots\varepsilon_m}\,\varkappa_1^{v_1'}\overset{v_m'}{\ldots\varkappa_m}\,\pi_1^{w_1'}\overset{w_z'}{\ldots\pi_z}\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^{l^n}\ldots\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^{l^n},\ (\Lambda_n),$$

to bi, budući da su brojevi $\alpha_1^{(i)},\ldots,\alpha_z^{(i)}$ prosti prema l, odatle izlazilo, da su eksponenti $u_1,\ldots,u_m,\ v_1,\ldots,v_m,\ w_1,\ldots,w_z$ po redu jednaki eksponentima $u_1',\ldots,u_m',\ v_1',\ldots,v_m',\ w_1',\ldots,w_z'$, pak bi moralo biti

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n}\ldots\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n}\equiv\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^{l^n}\ldots\left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^{l^n},\ (\Lambda_n).$$

Iz te kongruencije izvodimo po redu ovih z kongruencija:

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n}\equiv\left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^{l^n},\quad\left(l_1^{\,l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}}\right)$$

— — — — — — — — — — — — —

Digitized by Google

$$\left(\begin{matrix}(i_z)\\ \alpha_z\end{matrix}\right)^{l^n} \equiv \left(\begin{matrix}(i'_z)\\ \alpha_z\end{matrix}\right)^{l^n}, \quad \left(\begin{matrix}l_z[nl^n-(n-1)l^{n-1}\\ z\end{matrix}\right).$$

Uzmemo li sada kojugod od tih kongruencija, n. pr. ovu:

$$\left(\begin{matrix}(i_k)\\ \alpha_k\end{matrix}\right)^{l^n} \equiv \left(\begin{matrix}(i'_k)\\ \alpha_k\end{matrix}\right)^{l^n}, \quad \left(\begin{matrix}l_k[nl^n-(n-1)l^{n-1}\\ k\end{matrix}\right),$$

to bi odavde izlazilo, da mora biti

$$\alpha_k^{(i_k)} \equiv \zeta_n^e \, \alpha_k^{(i'_k)}, \qquad \left(\begin{matrix}l_k l^{n-1}\\ k\end{matrix}\right),$$

gdje je ζ_n primitivan l^n-ti korijen jedinice, a e jedna od vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l^n—1, no to je poradi gore razvijenoga svojstva brojeva $\alpha_k^{(i)}$ samo moguće, ako je

$$i_k = i'_k,$$
$$(k = 1, 2, \ldots, z).$$

To pak znači, da izrazi s lijeve i desne strane kongruencije (8) nijesu bili različiti.

A budući da s obzirom na modul Λ_n ima u svem

$$l^{m'[nl^n-(n-1)l^{n-1}]} \prod_1^z \left(1 - \frac{1}{n(l_s)}\right)$$

prema l prostih, a među sobom inkongruentnih brojeva, to nam cijeli brojevi (8) nadaju potpun sustav takovih brojeva. Tim je 14. poučka dokazana.

15. poučka. Ako nam $\mathfrak{q}_1, \ldots, \mathfrak{q}_m$, $\mathfrak{y}_1, \ldots, \mathfrak{y}_z$, $\varkappa_1, \ldots, \varkappa_m$, $\pi_1, \ldots, \pi_z$ imaju ono isto značenje, što ga imađahu u 14. poučki, to valja za svaki prema l prost cio broj ω u k s obzirom na modul Λ'_n kongruencija od oblika

Digitized by Google

$$(9)\qquad \omega \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s} \alpha^{l^n}, \quad (\Lambda'_n),$$

gdjeno treba eksponentima $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_s$ podijeliti izvjesne vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l^n-1, a pod α razumjeti zgodan cio broj tijela k.

Dokaz. I u ovom se slučaju može ponajprije dokazati, da broj

$$\varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s},$$

u kom eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_s$ imaju koju od vrijednosti 0, 1, 2, . . . , l^n-1, ne može drukčije biti kongruentan l^n-toj potenciji kojega cijeloga broja tijela k s obzirom na modul Λ_n', nego da budu svi ti eksponenti jednaki 0. Dokaz je posve analogan dokazu u 14. poučki.

Stavimo sada

$$L_1 = n \left(l_1 l^{n-1}\right) \left(n\,(l_1)-1\right),$$

pa neka nam

$$(10)\qquad \alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{(L_1)}$$

predočuje potpun sustav cijelih prema l_1 prostih, a s obzirom na modul $l_1^{l_1 l^{n-1}+1}$ inkongruentnih brojeva tijela k, koji su osim toga svi kongruentni 1 s obzirom na modul

$$l_2^{l_2 l^{n-1}+1}\, l_3^{l_3 l^{n-1}+1} \ldots l_s^{l_s l^{n-1}+1}.$$

Budući da je uopće

$$\alpha_1^{(k)} \not\equiv \zeta_2'\, \alpha_1^{(k)}, \equiv \zeta_1'\, \alpha_1^{(k)}, \quad \left(l_1^{l_1 l^{n-1}+1}\right),$$

$$(k = 1, 2, \ldots L_1),$$

Digitized by Google

gdje je ζ_1' primitivan l-ti, a ζ_2' primitivan l^2-ti korijen jedinice, to možemo iz sustava (10) odabrati $\frac{L_1}{l^n}$ brojeva n. pr.

$$\alpha_1^{(1)}, \ldots, \alpha_1^{\left(\frac{L_1}{l^n}\right)},$$

koji se odlikuju ovim osobitim svojstvom: ako je α_1 kojigod između tih brojeva, to među njima nema broja, koji bi bio kongruentan $\zeta_1' \alpha_1$ ili $\zeta_2' \alpha_1$ s obzirom na modul $l_1^{l_1 l^{n-1}}+1$.

Slično ćemo odrediti za modul $l_2^{l_2 l^{n-1}}+1$ sustav brojeva

$$\alpha_2^{(1)}, \ldots, \alpha_2^{\left(\frac{L_2}{l^n}\right)},$$
$$\left(L_2 = n\,(l_2^{l_2 l^{n-1}})\;(n\,(l_2)-1)\right),$$

koji su prosti prema l_2, s obzirom na modul $l_2^{l_2 l^{n-1}}+1$ među sobom inkongruentni, a osim toga svi kongruentni 1 s obzirom na modul $l_1^{l_1 l^{n-1}}+1\, l_3^{l_3 l^{n-1}}+1 \ldots {}_z l^{l_z l^{n-1}}+1$, i odlikuju se ovim svojstvom: ako je α_2 kojigod broj toga sustava, to u istom sustavu nema broja, koji bi bio kongruentan $\zeta_1' \alpha_2$ ili $\zeta_2' \alpha_2$ s obzirom na modul $l_2^{l_2 l^{n-1}}+1$.

Taj ćemo postupak nastaviti i konačno za modul ${}_z l^{l l_z}+1$ odrediti sustav brojeva

$$\alpha_z^{(1)}, \ldots, \alpha_z^{\left(\frac{L_z}{l^n}\right)},$$
$$\left(L_z = n\,({}_z l^{l_z l^{n-1}})\;(n\,(l_z)-1)\right),$$

Digitized by Google

koji su svi prosti prema l_z, s obzirom na modul $l_z^{l_z l^{n-1}+1}$ među sobom inkongruentni, a osim toga svi kongruentni 1 s obzirom na modul $l_1^{l_1 l^{n-1}+1} l_2^{l_2 l^{n-1}+1} \ldots l_{z-1}^{l_{z-1} l^{n-1}+1}$, i odlikuju se ovim osobitim svojstvom: ako je α_z kojigod broj toga sustava, to u istom sustavu nema broja, koji bi bio kongruentan $\zeta_1' \alpha_z$ ili $\zeta_2' \alpha_z$ s obzirom na modul $l_z^{l_z l^{n-1}+1}$.

Izraz

$$(11)\quad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z} \left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n} \ldots \left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n},$$

$$\left(\begin{array}{c} u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_z = 0, 1, 2, \ldots, l^n - 1 \\ i_1 = 1, 2, \ldots, \frac{L_1}{l^n}, \ldots, i_z = 1, 2, \ldots, \frac{L_z}{l^n} \end{array} \right).$$

predočuje nam sustav od

$$l^{mn} L_1 L_2 \ldots L_z$$

cijelih brojeva tijela k. Svi su ti brojevi prosti prema l i među sobom inkongruentni s obzirom na modul Λ_n'. Zaista ako uzmemo, da su dva broja od oblika (11) kongruentna s obzirom na modul Λ_n', n. pr. da je

$$(12)\quad \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m} \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_s^{w_s} \left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n} \ldots \left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n}$$

$$\equiv \varepsilon_1^{u_1'} \ldots \varepsilon_m^{u'_m} \varkappa_1^{v_1'} \ldots \varkappa_m^{v'_m} \pi_1^{w_1'} \ldots \pi_z^{w'_z} \left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^{l^n} \ldots \left(\alpha_z^{(i'_z)}\right)^{l^n}, (\Lambda_n'),$$

to bi, budući da su svi brojevi $\alpha_1^{(i)}, \ldots, \alpha_z^{(i)}$ prosti prema l, odatle izlazilo, da su svi eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_z$ po redu jednaki eksponentima $u_1', \ldots, u'_m, v_1', \ldots, v'_m, w_1', \ldots, w_z'$, te bi moralo biti

Digitized by Google

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n} \dots \left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n} \equiv \left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^{l^n} \dots \left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^{l^n}, \quad (\Lambda'_n).$$

Iz te kongruencije izvodimo po redu ovih z kongruencija:

$$\left(\alpha_1^{(i_1)}\right)^{l^n} \equiv \left(\alpha_1^{(i_1')}\right)^{l^n}, \quad \left(l_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

— — — — — — — —

$$\left(\alpha_z^{(i_z)}\right)^{l^n} \equiv \left(\alpha_z^{(i_z')}\right)^{l^n}, \quad \left(l_z^{l_z[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right).$$

Uzmemo li sada kojugod od tih kongruencija, n. pr. ovu:

$$\left(\alpha_k^{(i_k)}\right)^{l^n} \equiv \left(\alpha_k^{(i'_k)}\right)^{l^n}, \quad \left(l_k^{l_k[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

pa postupamo li s njome kao u analognom slučaju 14. poučke, uvjerit ćemo se, da bi poradi nje morala da postoji kongruencija

$$\alpha_k^{(i_k)} \equiv \zeta_n' \, \alpha_k^{(i'_k)}, \quad \left(l_k^{l_k l^{n-1}+1}\right),$$

gdjeno je ζ_n' l^n-ti korijen jedinice, no takova je kongruencija poradi gore razvijenih svojstava brojeva $\alpha_k^{(i_k)}$ nemoguća, osim ako je

$$i_k = i_k',$$
$$(k = 1, 2, \dots, z).$$

To pak znači, da izrazi s lijeve i desne strane kongruencije (12) nijesu bili različiti.

Budući da s obzirom na modul Λ'_n ima u svem

$$l^{mn} L_1 L_2 \dots L_z$$

Digitized by Google

prema l prostih, a među sobom inkongruentnih brojeva, to nam cijeli brojevi (12) nadaju potpun sustav takovih brojeva. Tim je 15. poučka dokazana.

§ 10.

O karakternom sustavu broja i ideala tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Neka budu prosti ideali tijela k sadržani u relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na tijelo k svi prosti prema l; označimo ih sa $\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{t'}$.

Ako je ν kojigod cijeli broj u k, zvat ćemo

$$(1) \qquad \left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_1}\right)_n, \ldots, \left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n$$

karakternim sustavom broja ν u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$. Ako je nadalje $\mathfrak{J}$ ideal tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, to je $N_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}(\mathfrak{J}) = \mathfrak{j}$ ideal u k, te možemo staviti $\mathfrak{j}^{hh'} = (\iota)$ tako, da bude ι cio broj u k. Imaju li tada za sve jedinice ξ tijela k simboli

$$\left(\frac{\xi,\ \mu}{\mathfrak{d}_1}\right)_n, \ldots, \left(\frac{\xi,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n$$

vrijednost 1, nazvat ćemo

$$\left(\frac{\iota,\ \mu}{\mathfrak{d}_1}\right)_n, \ldots, \left(\frac{\iota,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n$$

karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}$; taj je sustav idealom $\mathfrak{J}$ jednoznačno određen.

Uzmimo nadalje, da među jedinicama tijela k ima takova jedinica ε_1, za koju svi simboli

Digitized by Google

$$\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_1}\right)_n, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n$$

nemaju vrijednost 1, nego među njima ima jedan simbol n. pr. $\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n$, koji je jednak primitivnomu l^n-tom korijenu jedinice $\zeta_n^{(1)}$. Promotrit ćemo tada sve jedinice ξ_2 tijela k, za koje je $\left(\frac{\xi_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1$. Neka bude među tima jedinicama ξ_2 jedinica ε_2, za koju je $\left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right) = \zeta_n^{(2)}$, gdjeno nam $\zeta_n^{(2)}$ predočuje primitivni l^n-ti korijen jedinice. Promotrit ćemo sada sve jedinice ξ_3 tijela k, za koje je $\left(\frac{\xi_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1$ i $\left(\frac{\xi_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1$. Između tih jedinica ξ_3 može biti takova jedinica ε_3, za koju je $\left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-2}}\right) = \zeta_n^{(3)}$, gdje je $\zeta_n^{(3)}$ primitivan l^n-ti korijen jedinice. Postupajmo tako i dalje. Dobit ćemo na taj način $r_1 = r_1^{(n)}$ jedinica $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{r_1}$, za koje valjaju jednadžbe

$$\left(\frac{\varepsilon_1, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = \zeta_n^{(1)},$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_2, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = \zeta_n^{(2)}$$

$$\left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_3, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-2}}\right)_n = \zeta_n^{(3)}$$

— — — — — — — — — — — — — — — —

$$\left(\frac{\varepsilon_{r_1}, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_{r_1}, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_{r_1}, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-2}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{r_1}, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right)_n = \zeta_n^{(r_1)};$$

između ostalih pak jedinica ξ tijela k, za koje je

$$\left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right)_n = 1,$$

Digitized by Google

neka ne bude više nijedne, za koju bi jedan od ostalih simbola, što potječu od ideala $\mathfrak{d}_{t'-r_1}, \ldots, \mathfrak{d}_1$, bio jednak primitivnomu l^n-tom korijenu jedinice. No neka bude ε_{r_1+1} takova između tih jedinica ξ, za koju je $\left(\frac{\varepsilon_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1}}\right)$ jednak primitivnomu l^{n-1}-tom korijenu jedinice $\zeta^{(1)}_{n-1}$. Promotrimo sve jedinice ξ_{r_1+1} tijela k, za koje je $\left(\frac{\xi_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right) = 1, \ldots, \left(\frac{\xi_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1}}\right) = 1$. Uzmimo, da među tima jedinicama ξ_{r_1+1} ima jedinica ε_{r_1+2}, za koju je

$$\left(\frac{\varepsilon_{r_1+2},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-1}}\right)_n = \zeta^{(2)}_{n-1},$$

gdje je $\zeta^{(2)}_{n-1}$ primitivan l^{n-1}-ti korijen jedinice.

Započeti ćemo postupak nastaviti, te ćemo napokon doći do sustava jedinica $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1}; \varepsilon_{r_1+1}, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2}; \varepsilon_{r_1+r_2+1}, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2+r_3}; \ldots; \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n}$, za koji valjaju jednadžbe

$$\left(\frac{\varepsilon_1,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = \zeta^{(1)}_n,$$

$$\left(\frac{\varepsilon_2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right) = \zeta^{(2)}_n,$$

— — — — — — — — — — —

$$\left(\frac{\varepsilon_{r_1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_{r_1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{r_1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right)_n = \zeta^{(r_1)}_n$$

$$\left(\frac{\varepsilon_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon_{r_1+1},\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1}}\right)_n = \zeta^{(1)}_{n-1},$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{l}
\left(\frac{\varepsilon r_1+2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'\ r_1}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right) = \zeta_{n-1}^{(2)}, \\
\left(\frac{\varepsilon r_1+r_2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \ldots\ \ldots\ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1+1}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2+1}}\right)_n = \zeta_{n-1}^{(r_2)}, \\
\left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+1,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+1,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+1,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2+1}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+1,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2}}\right)_n = \zeta_{n-2}^{(1)}, \\
\left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+r_3,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n = 1,\ \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+r_3,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-1}}\right) = 1, \ldots\ \ldots\ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+r_3,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-r_3+1}}\right) = \zeta_{n-2}^{(r_3)}, \\
\left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1,\ \mu}{\mathfrak{d}t'}\right)_n = 1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1,\ \mu}{\mathfrak{d}t'-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}+1}\right)_n = 1, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1,\ \mu}{\mathfrak{d}t'-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}}\right)_n = \zeta_{-1}^{(1)}, \\
\left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n,\ \mu}{\mathfrak{d}t'}\right)_n = 1, \ldots\ldots, \left(\frac{\varepsilon r_1+r_2+\ldots+r_n,\ \mu}{\mathfrak{d}t'-r_1-r_2-\ldots-r_n+1}\right)_n = \zeta_{-1}^{(r_n)}.
\end{array}
\tag{2}
$$

Tu su $\zeta_k^{(1)}, \ldots, \zeta_k^{(r_k)}$, $(k = 1, 2, \ldots, n)$, primitivni l^k-ti korijeni jedinice. Ako su za ostale jedinice ξ tijela simboli

Digitized by Google

$$\left(\frac{\xi,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n ; \ldots , \left(\frac{\xi,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-\ldots-r_n+1}}\right)_n$$

svi po redu jednaki 1, neka budu i ostali simboli

$$\left(\frac{\xi,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-\ldots-r_n}}\right)_n , \ldots , \left(\frac{\xi,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}}\right)_n$$

jednaki 1.

Simboli, koji potječu od ideala $\mathfrak{d}_{t'}, \ldots, \mathfrak{d}_{t'-r_1+1}$, mogu imati l^n vrijednosti. Među simbolima pak, koji potječu od ideala $\mathfrak{d}_{t'-r_1}, \ldots, \mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2+1}$, može biti takovih, koji mogu postići l^{n-1}vrijednosti, ali i takovih, koji su podobni, da postignu l^nvrijednosti. Prvih neka bude $r_2^{(n-1)}$, a drugih $r_2^{(n)}$. Nadalje može među simbolima $\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2}, \ldots, \mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-r_3+1}$ biti l^{n-2}, l^{n-1} i l^n-vrijednosnih. Prve vrste neka bude $r_3^{(n-2)}$, druge $r_3^{(n-1)}$, a treće $r_3^{(n)}$; ..., napokon može među simbolima $\mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-\ldots-r_{n-1}}, \ldots, \mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-\ldots-r_n+1}$ biti l, l^2, $l^3, \ldots, l^n$-vrijednosnih. Prve vrste neka bude $r_n^{(1)}$, druge $r_n^{(2)}$, treće $r_n^{(3)}, \ldots$, zadnje vrste $r_n^{(n)}$.

Ako je između jedinica $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_n}$ jedinica ε_σ takova, da je

$$\left(\frac{\varepsilon_\sigma,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right)_n = \zeta_x ,$$

gdje je ζ_x primitivan l^x-ti korijen jedinice, a simbol je $\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right)_n$ podoban, da postigne svega l^x vrijednosti, moći ćemo uvijek odrediti prikladnu potenciju ε_σ^a jedinice ε_σ tako, da bude

$$\left(\frac{\varepsilon_\sigma^a,\ \nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right) = +1.$$

Digitized by Google

To ne će biti moguće, ako simbol $\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right)_n$ može da postigne više od l^x vrijednosti, n. pr. l^τ vrijednosti. Stavimo li $\zeta_\tau = e^{\frac{2\pi i}{l^\tau}}$, to će se u tom slučaju dati odrediti zgodna potencija ε_σ^c jedinice ε_σ tako, da simbol

$$\left(\frac{\varepsilon_\sigma^c\ \nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right)_n$$

dobije izvjesnu, i to samo jednu, između vrijednosti

$$1,\ \zeta_\tau,\ \zeta_\tau^2,\ \ldots,\ \zeta_\tau^{l^{\tau-x}-1}. \tag{3}$$

Zaista ako je

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right)_n = e^{\frac{2\lambda\pi i}{l^\tau}},\quad \left(\frac{\varepsilon_\sigma,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}}\right)_n = e^{\frac{2\lambda'\pi i}{l^x}},$$

gdjeno su λ, λ' cijeli brojevi prosti prema l, dade se uvijek odrediti broj c tako, da bude

$$e^{\frac{2(\lambda' c l^{\tau-x}+\lambda)\pi i}{l^\tau}}$$

jedan između brojeva (3). Stavimo li naime

$$\lambda = c'\, l^{\tau-x} + d$$

tako, da d bude manji od $l^{\tau-x}$, valjat će u tu svrhu odrediti c prema kongruenciji

$$c \equiv -c',\quad (l^x).$$

Odredit ćemo zbilja u prvom slučaju zgodnu potenciju ε_σ^a tako, da bude

Digitized by Google

$$\left(\frac{\overset{a}{\varepsilon_\sigma}\, \iota,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}} \right)_n = +1,$$

a u drugom, da bude

$$\left(\frac{\overset{c}{\varepsilon_\sigma}\, \iota,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'-\sigma+1}} \right)_n$$

jednako jednoj između vrijednosti (3). To ćemo učiniti sa svakom jedinicom ε_σ iz sustava

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon^{r_1+r_2+\ldots+r_n}$$

i sa svakim simbolom, koji potječe od ideala

$$\mathfrak{d}_1, \ldots, \mathfrak{d}_{t'-r_1-r_2-\ldots-r_n+1}.$$

Isto se očito postigne, ako ι pomnožimo produktom ε svih tih potencija jedinica ε_σ. Tim će načinom

$$r^* = r_1^{(n)} + r_2^{(n-1)} + \ldots + r_n^{(1)}$$

između simbola

$$\left(\frac{\varepsilon\, \iota,\ \mu}{\mathfrak{d}_1} \right)_n, \ldots, \left(\frac{\varepsilon\, \iota,\ \mu}{\mathfrak{d}_{t'}} \right)_n$$

imati svagda vrijednost $+1$. Vrijednosti ostalih $t'-r^*$ simbola nazvat ćemo u ovom slučaju karakternim sustavom ideala $\mathfrak{J}$.

Ako označimo sa t_s, $(s = 1, 2, \ldots, n)$ broj l^{n-s+1}-vrijednosnih između simbola (1), to ima među simbolima karakternoga sustava ideala $\mathfrak{J}$

Digitized by Google

$$r^{(n)} = t_1 - r_1^{(n)} - r_2^{(n)} - \ldots - r_n^{(n)} \qquad l^n\text{-vrijednosnih},$$

$$r^{(n-1)} = t_2 - r_2^{(n-1)} - r_3^{(n-1)} - \ldots - r_n^{(n-1)} + r_n^{(n)} \qquad l^{n-1} \quad ,, \quad ,$$

$$r^{(n-2)} = t_3 - r_3^{(n-2)} - r_4^{(n-2)} - \ldots - r_n^{(n-2)} + r_{n-1}^{(n)} + r_n^{(n-1)} \qquad l^{n-2} \quad ,, \quad ,$$

— — — — — — — — — — — — —

$$r_n^{(1)} = t - r_n^{(1)} + r_2^{(n)} + r_3^{(n-1)} + \ldots + r_n^{(2)} \qquad l\text{-} \quad ,, \quad .$$

Stavimo li pokraćeno

$$nr = nr^{(n)} + (n-1)r^{(n-1)} + \ldots + r^{(1)},$$
$$ns = nr_1 + (n-1)r_2 + \ldots + r_n,$$
$$nt = nt_1 + (n-1)t_2 + \ldots + t_n,$$

to valja jednadžba

$$t - s = r, \tag{4}$$

kojom ćemo se doskora poslužiti.

Kako smo gore razvili, pripada svakomu idealu $\mathfrak{J}$ tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ jednoznačno određen karakterni sustav. Taj je karakterni sustav zajednički svim idealima razreda, u koji $\mathfrak{J}$ pripada.

§ 11.

Rodovi tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Skup svih razreda, kojima pripada isti karakterni sustav, zvat ćemo rodom, napose glavnim rodom onaj rod, kojega se karakterni sustav sastoji od samih jedinica $+1$.

Da odredimo gornju granicu za broj rodova, dokazat ćemo ponajprije ovu poučku:

16. poučka. Ako t i v imaju ono isto značenje, što ga imađahu u 10. poučki, pak ako sa $r^{(n)}$ označimo broj l^n-vrijednosnih,

Digitized by Google

sa $r^{(n-1)}$ broj l^{n-1}-vrijednosnih, ..., napokon sa $r^{(1)}$ broj l-vrijednosnih karaktera kompleksa u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, to valja relacija

$$t + v - m \leqq r,$$

gdje r ima značenje predašnjega paragrafa.

Dokaz. Ako su

$$\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{r_1}, \varepsilon_{r_1+1}, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2}, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}, \ldots, \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_n}$$

karakteristične jedinice određene jednadžbama (2) predašnjega paragrafa, a $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{w-w^*}, \eta_{1,1}, \ldots, \eta_{1,v_1^*}, \ldots, \eta_{n,1}, \ldots, \eta_{n,v_n^*}$ imaju ono isto značenje, što ga imađahu u 10. poučki, ne može postojati snošaj od oblika

$$(1) \quad \varepsilon = \varepsilon_1^{a_1} \ldots \varepsilon_{r_1}^{a_{r_1}} \varepsilon_{r_1+1}^{a_{r_1+1}} \ldots \varepsilon_{r_1+r_2}^{a_{r_1+r_2}} \ldots \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}^{a_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}} \ldots \varepsilon_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n}^{a_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n}} \vartheta \xi^{l^n} = 1,$$

gdjeno je

$$\vartheta = \vartheta_1^{b_1} \ldots \vartheta_{w-w^*}^{b_{w-w^*}} \eta_1^{l^n} \prod_{1}^{n} \left| s \right| \begin{pmatrix} u_{s,1} & \ldots & u_{s,v_s^*} \\ \eta_{s,1} & \ldots & \eta_{s,v_s^*} \end{pmatrix}^{l^{n-s}},$$

eksponenti $a_1, \ldots, a_{r_1}$ imaju koju između vrijednosti $0, 1, \ldots, l^n-1$, eksponenti $a_{r_1+1}, \ldots, a_{r_1+r_2}$ koju između vrijednosti $0, 1, \ldots, l^{n-1}-1$, i t. d., napokon eksponenti

$$a_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}, \ldots, a_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n};$$

$$b_1, \ldots, b_{w-w^*}, u_{s,1}, \ldots, u_{s,v_s^*}$$

koju između vrijednosti $0, 1, \ldots, l-1$, a ξ, η predočuju jedinice tijela k, osim ako su svi ti eksponenti jednaki 0.

Digitized by Google

Zaista kada bi postojala jednadžba (1), moralo bi biti

$$\left(\frac{\varepsilon, \mu}{\mathfrak{w}}\right)_n = +1$$

za sve proste ideale karakterističnih simbola, no to je samo moguće, ako su svi rečeni eksponenti jednaki 0.

Dademo li, da u izrazu ε jednadžbe (1) eksponenti $a_1, \ldots, a_{r_1}$ prođu sve vrijednosti 0, 1, ... l^n-1, eksponenti $a_{r_1+1}, \ldots, a_{r_2+r_2}$ sve vrijednosti 0, 1, ..., $l^{n-1}-1$ i t. d, napokon eksponenti

$$a_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}, \ldots, a_{r_1+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n},$$

$$b_1, \ldots, b_{w-w^*}, u_{s,1}, \ldots, u_{s,v_s^*}$$

sve vrijednosti 0, 1, ..., $l-1$, dobit ćemo

$$l^{nr_1+(n-1)r_2+\ldots+r_n+nv}$$

jediničnih sveza l^n-toga stepena. No kako jediničnih sveza l^n-toga stepena uopće ima l^{mn}, mora dakle da bude

$$nr_1 + (n-1)r_2 + \ldots + r_n + nv \leqq mn$$

ili prema (4) predašnjega paragrafa

$$t + v - m \leqq r,$$

kako je trebalo dokazati. Poradi 10. poučke mora biti $r \geqq 1$.

Budući da valja

17. poučka: Broj je g različitih rodova u $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ manji ili ponajviše jednak broju a dvoličnih ideala, (dokazuje se analogno dokazu za tijelo $K\sqrt[l]{\mu}$; isp. F. § 6, Satz 22), — valjat će i ova poučka:

Digitized by Google

18. poučka: Broj je rodova g manji ili ponajviše jednak $l^{n(r-1)}$, ako nam r ima značenje kao dosad.

Dokaz nam daju poučke 17., 10. i 16.

§ 12.

Posebni zakon recipročnosti.

19. poučka. Ako je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^n-toga stepena, a π primaran broj l^n-toga stepena tako, da je $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$; nadalje $\mathfrak{r}$ kakavgod prosti ideal u k, za koji je $\mathfrak{r}^{hh'} = (\rho)$, gdje je ρ cio broj u k, to izlazi iz $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = +1$, da je također $\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1$.

Dokaz. Poradi $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right) = +1$ raspada se $\mathfrak{r}$ u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ na l^n među sobom različitih prostih ideala. Ako je jedan između tih ideala $\mathfrak{R}$, budući da je broj rodova u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ jednak 1, mora da bude

$$\left(\frac{\rho, \pi}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1.$$

20. poučka. Ako je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^n-toga stepena u k, a π primaran broj l^n-toga stepena u k tako, da je $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$, pa ako je $\mathfrak{r}$ kojigod prosti ideal u k, za koji je $\mathfrak{r}^{hh'} = (\rho)$, gdjeno je ρ cio broj u k, to mora biti, ako je

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = +1, \quad \text{također} \quad \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1;$$

ako je pak

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = \zeta_k, \qquad \text{također} \quad \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta'_k,$$

gdjeno su ζ_k, ζ'_k primitivni l^k-ti korijeni jedinice.

Digitized by Google

Dokaz. Prvi se dio ove poučke dokazuje kao 19. poučka. Ako je pak u drugom dijelu $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = \zeta_n$, to mora biti također

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta_n',$$

gdje su ζ_n, ζ_n' l^n-ti korijeni jedinice. To izlazi iz zakona recipročnosti za ostatke l-tih potencija.

No da dokažemo ostali dio tvrdnje, odredit ćemo primaran prost ideal l^n-toga stepena $\mathfrak{p}_1$ u k sa primarnim brojem π_1 l^n-toga stepena, za koji je

$$\left(\frac{\varrho}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \zeta_n, \quad \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \zeta_n',$$

gdjeno su ζ_n, ζ_n' primitivni l^n-ti korijeni jedinice. Po onome, što smo već pokazali, mora biti $\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \zeta_n''$, gdje je opet ζ_n'' primitivan l^n-ti korijen jedinice. Stoga možemo odrediti eksponenat e tako, da bude

$$\left(\frac{\pi\ \pi_1^{el^{n-k}}}{\mathfrak{r}}\right)_n = +1.$$

U tijelu $K\left(\sqrt[l^n]{\pi\pi_1^{el^{n-k}}}\right)$ ima ponajviše l^{n-k} rodova. Da ih zbilja ima l^{n-k}, možemo lako uvidjeti. Ako je $\mathfrak{P}$ prost ideal tijela $K\left(\sqrt[l^n]{\pi\pi_1^{el^{n-k}}}\right)$ sadržan u $\mathfrak{p}$ kao faktor, to se karakterni sustav ideala $\mathfrak{P}$ sastoji od karaktera

$$\left(\frac{\pi,\ \pi\pi_1^e}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)_{n-k}^{-e}, \quad \left(\frac{\pi,\ \pi\pi_1^e}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_{n-k}^{e}.$$

Digitized by Google

Zadnji je od tih karaktera jednak l^{n-k}-tomu primitivnom korijenu jedinice: dakle je različit od 0, jer smo uzeli, da $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n$ nije primitivan l^n-ti korijen jedinice. $\mathfrak{P}$ ne pripada glavnomu rodu, a poradi toga određuju ideali

$$\mathfrak{P},\ \mathfrak{P}^2,\ \mathfrak{P}^3,\ \ldots\ \mathfrak{P}^{l^{n-k}}$$

l^{n-k} različitih rodova.

Ako nam je sada k' cio racionalan broj prost prema l, tako da bude

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1} \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_n^{k'} = +1,$$

pak ako nam c_1, c_2 predočuju karaktere kojegagod roda u $K\left(\sqrt[l^n]{\pi\pi_1 \varepsilon l^{n-k}}\right)$, to mora biti

$$c_1\ {c_2}^{k'} = 1.$$

No i $\mathfrak{r}$ se raspada u $K\left(\sqrt[l^n]{\pi\pi_1 \varepsilon l^{n-k}}\right)$ na l^n među sobom različitih prostih ideala Svaki od tih prostih ideala ima karaktere

$$\left(\frac{\rho,\ \pi{\pi_1}^e}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n,\quad \left(\frac{\rho,\ \pi{\pi_1}^e}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)^e.$$

Stoga je

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)_n^{ek'} = 1.$$

No budući da je $\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n$ jednak primitivnomu l^n-tom korijenu jedinice, mora, kad je ek' prosto prema l, i $\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)_n$ biti jednako primitivnomu l^n-tom korijenu jedinice.

Digitized by Google

19. i 20. poučku možemo ujedno sabrati ovako:

21. poučka. Ako je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^n-toga stepena u k sa primarnim brojem l^n-toga stepena π, $\mathfrak{r}$ makar koji prosti ideal u k, a ρ takav cijeli broj u k, da bude $(\rho) = \mathfrak{r}^{hh'}$, to je svagda

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n^s, \tag{1}$$

gdjeno je s cio racionalan broj prost prema l.

§ 13.

O zakonu recipročnosti među primarnim i kojimgod drugim prostim idealom.

Ako se uzme, da je za tijelo $k(\zeta_n)$ l^n-tih kružnih jedinica u jednadžbi (1) § 12. eksponenat $s = 1$, dade se za tjelesa k nadređena tijelu $k(\zeta_n)$, ako je u k broj razreda h prost prema l, pokazati, da eksponenat s mora biti jednak 1. Postupak je analogan postupku Furtwänglerovu (F. § 12) pri dokazivanju toga posebnoga zakona recipročnosti za l-te ostatke potencija, gdje je l lih prost broj. No zakon recipročnosti za l^n-te ostatke potencija u kružnim tjelesima $k(\zeta_n)$ nije do danas izveden ni za slučaj, da je u $k(\zeta_n)$ broj razreda prost prema l. Dokazan je samo zakon recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija u tijelu imaginarnih brojeva $k(i)$, pak sam nedavno na temelju toga zakona recipročnosti već izveo zakon recipročnosti za bikvadratne ostatke potencija u izvjesnim algebarskim tjelesima nadređenima tijelu $k(i)$. U drugoj sam radnji odredio zakon recipročnosti za osme ostatke potencija, ali samo između racionalnoga i kojegagod drugoga cijeloga broja tijela osmih kružnih jedinica. Koliko je meni poznato, nije u tom smjeru ništa više učinjeno.

Kušat ću ovdje izvesti zakon recipročnosti za l^n-te ostatke potencija u tjelesima l^n-tih kružnih jedinica $k(\zeta_n)$ pod pretpostavkom, da je u $k(\zeta_n)$ broj razreda prost prema l, uzimajući, da je za $k(\zeta_n)$ poznat zakon recipročnosti među racionalnim i kojimgod

Digitized by Google

drugim prostim brojem. Prema tomu valja ono, što slijedi, zasad tek za tijelo osmih kružnih jedinica, a dade se raširiti po Furtwänglerovu načinu na izvjesna tomu tijelu nadređena algebarska brojna tjelesa.

Dokazat ćemo ponajprije ovu poučku:

22. poučka. Ako su u tijelu l^n-tih kružnih jedinica $k(\zeta_n)$ $\mathfrak{p}_1$ i $\mathfrak{p}_2$ dva prosta ideala, koji nijesu konjugirani, pak ako je

$$\mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \quad \mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2),$$

to se dade u $k(\zeta_n)$ odrediti primaran prost ideal l^n-toga stepena $\mathfrak{r}$ sa primarnim brojem l^n-toga stepena ρ tako, da bude

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \zeta_k' + 1, \quad \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_2}\right)_n = \zeta_k'' + 1, \quad (k \leqq n),$$

gdjeno su ζ_k', ζ_k'' primitivni l^k-ti korijeni jedinice.

Dokaz. Neka budu $\mathfrak{p}_1, \mathfrak{p}_1', \ldots, \mathfrak{p}_1^{(a_1)}$ i $\mathfrak{p}_2, \mathfrak{p}_2', \ldots, \mathfrak{p}_2^{(a_2)}$ svi sa $\mathfrak{p}_1$ i $\mathfrak{p}_2$ konjugirani i među sobom različiti prosti ideali u $k(\zeta_n)$. Stavimo

$$\mathfrak{p}_1^{hh'} = (\pi_1), \ (\mathfrak{p}_1')^{hh'} = (\pi_1'), \ldots, \left(\mathfrak{p}_1^{(a_1)}\right)^{hh'} = \left(\pi_1^{(a_1)}\right),$$

$$\mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2), \ (\mathfrak{p}_2')^{hh'} = (\pi_2'), \ldots, \left(\mathfrak{p}_2^{(a_2)}\right)^{hh'} = \left(\pi_2^{(a_2)}\right),$$

pa odredimo prost ideal $\mathfrak{r}$ u $k(\zeta_n)$ tako, da on bude primaran l^n-toga stepena i da valjaju jednadžbe

$$(1) \quad \begin{cases} \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \xi_k' + 1, & \left(\frac{\pi_1^{(s)}}{\mathfrak{r}}\right)_n = +1, \quad (s = 2, 3, \ldots, a_1), \\ \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right)_n = \xi_k' + 1, & \left(\frac{\pi_2^{(t)}}{\mathfrak{r}}\right)_n = +1, \quad (t = 2, 3, \ldots, a_2), \end{cases}$$

gdjeno su ξ_k, ξ'_k primitivni l^k-ti korijeni jedinice.

Onda je $\mathfrak{r}$ već onakav ideal, kakav se traži u 22. poučki.

Zaista ako stavimo

Digitized by Google

(2) $$\mathfrak{p}_1\mathfrak{p}_1' \ldots \mathfrak{p}_1^{(a_1)} = p_1, \quad \mathfrak{p}_2\mathfrak{p}_2' \ldots \mathfrak{p}_2^{(a_2)} = p_2,$$

gdjeno su p_1, p_2 racionalni prosti brojevi, to je

$$\left(\frac{p_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{p_1}\right)_n, \quad \left(\frac{p_2}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{p_2}\right)_n$$

(bar za tijelo osmih kružnih jedinica).

Poradi (1) i (2) mogu se te jednadžbe i ovako napisati

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{p_1}\right)_n, \quad \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{p_2}\right)_n,$$

a s obzirom na 21. poučku i (1) još dalje u obliku

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)_n, \quad \left(\frac{\pi_2}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_2}\right)_n,$$

a tim je 22. poučka dokazana.

Sada je lako dokazati, da valja ova poučka:

23. poučka. Ako je $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^n-toga stepena u tijelu l^n-tih kružnih jedinica $k(\zeta_n)$ sa primarnim prostim brojem l^n-toga stepena π, $\mathfrak{r}$ kojigod prost ideal u $k(\zeta_n)$, a $(\rho) = \mathfrak{r}^{hh'}$, to je uvijek

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n.$$

Dokaz. Ako je $\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = 1$, sigurno je i $\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$ poradi 21. poučke. Stoga ćemo uzeti, da je

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n = \xi'_k \neq 1, \qquad (k \leqq n),$$

gdje je ξ'_k primitivan l^k-ti korijen jedinice.

Odredimo sada primaran prost ideal l^n-toga stepena $\mathfrak{p}_1$ sa primarnim brojem l^n-toga stepena π_1 tako, da bude

Digitized by Google

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)_n = \xi_k'' \neq 1, \quad \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{r}}\right)_n = \xi_k''' \neq 1,$$

gdje su ξ_k'', ξ_k''' primitivni l^k-ti korijeni jedinice, i eksponenat e prost prema l tako, da bude

$$\left(\frac{\pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{r}}\right)_n = +1.$$

Promotrimo sada tijelo $K(\sqrt[l^n]{\pi\pi_1^{\,e}})$. U tom tijelu ima točno l^{n-k} rodova. Budući pak da je

$$\left(\frac{\pi_1}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\pi}{\mathfrak{p}_1}\right)_n^{-1} = +1,$$

to je produkt karaktera za svaki rod toga tijela jednak $+1$. No $\mathfrak{r}$ se raspada u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\pi\pi_1^{\,e}})$ na l^n među sobom različitih prostih ideala. Svakomu od tih prostih ideala pripadaju karakteri

$$\left(\frac{\rho,\ \pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n, \quad \left(\frac{\rho,\ \pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{p}_1}\right)_n = \left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}_1}\right)^e.$$

Produkt tih karaktera mora biti $+1$. Dakle je

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}\mathfrak{p}_1^{\,e}}\right)_n = +1 = \left(\frac{\pi\pi_1^{\,e}}{\mathfrak{r}}\right),$$

a odavle izlazi, da je

$$\left(\frac{\rho}{\mathfrak{p}}\right)_n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{r}}\right)_n.$$

Ako su $\mathfrak{r}$ i $\mathfrak{p}$ relativno konjugirani prosti ideali, lako je s pomoću netom dobivenoga resultata dokazati i za taj slučaj ispravnost 23. poučke.

Posebni zakon recipročnosti za tjelesa nadređena tjelesima $k(\zeta_n)$ ne ćemo ovdje više dokazivati, nego ćemo u onom, što još dolazi,

Digitized by Google

uzeti, da je već dokazan; dakle da je za tijelo k u jednadžbi 21. poučke $s = 1$.

S pomoću te činjenice možemo lako dokazati ovu poučku:

24. poučka. Ako je ν kojigod prema l prost broj, a μ primaran broj l^n-toga stepena u k, to je

$$\prod_{\mathfrak{w}}{}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)_n = +1,$$

ako se produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}'$ protegne na sve proste ideale tijela k, koji nijesu sadržani u l.

Dokaz je sasvim analogan dokazu za sličnu poučku u teoriji ostataka l-tih i četvrtih potencija (F. § 15, Lietzmann: Inaugural-Dissertation § 14, Satz 38). Stoga ga ne ćemo napose izvoditi.

Isto se tako lako uvjerimo, ako su ν, μ, ν^*, μ^* cijeli brojevi u k prosti prema l, a $\nu\nu^*$, $\mu\mu^*$ primarni brojevi l^n-toga stepena, pak ako je ν prost prema μ, ν^* prost prema μ^*, da je

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_n \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_n^{-1} = \left(\frac{\nu^*}{\mu^*}\right)_n \left(\frac{\mu^*}{\nu^*}\right)_n^{-1};$$

ako je pak bar jedan između brojeva ν, μ primaran l^n-toga stepena, da je

$$\left(\frac{\nu}{\mu}\right)_n \left(\frac{\mu}{\nu}\right)_n^{-1} = +1.$$

(Isporedi F. § 15 Satz 43).

Digitized by Google

§ 14.

Broj rodova u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, ako je relativna diskriminanta $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$ prosta prema l.

25. poučka. Ako je relativna diskriminanta $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\,k}$ tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ prosta prema l, pa ako obilježimo sa r_s, $(s=1,2,\ldots,n)$, broj l^{n-s+1}-vrijednosnih rodnih karaktera, a sa

$$c_1^{(s)},\ c_2^{(s)},\ \ldots,\ c_{r_s}^{(s)},\quad (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n),$$

kakvegod l^s-te korijene jedinica, koje su tako ustrojene, da je produkt svih tih jedinica

$$(1)\qquad \prod_{1}^{n}{}_{s}\left(c_1^{(s)}\ c_2^{(s)}\ \ldots\ c_{r_s}^{(s)}\right)=+1,$$

to ima u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ uvijek rod, kojega su karakteri jedinice

$$c_1^{(s)},\ c_2^{(s)},\ \ldots,\ c_{r_s}^{(s)},\ (s=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Stoga je broj rodova u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ jednak $l^{n(r-1)}$, ako stavimo $nr=nr_1+(n-1)r_2+\ldots+r_n$.

Dokaz. Budući da smo uzeli, da je μ primaran broj, možemo ga uzeti prostim prema l.

Označimo li sa $\mathfrak{d}_1,\ldots,\mathfrak{d}_{t_1}$ proste ideale, od kojih potječu l^n-vrijednosni karakteri broja; sa $\mathfrak{d}_{t_1+1},\ldots,\mathfrak{d}_{t_1+t_2}$ proste ideale, od kojih potječu l^{n-1}-vrijednosni karakteri i t. d.; napokon sa

$$\mathfrak{d}_{t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}+1},\ \ldots,\ \mathfrak{d}_{t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}+t_n}$$

Digitized by Google

proste ideale, koji daju l-vrijednosne karaktere broja, moći ćemo, ako stavimo

$$\mathfrak{d}_k^{hh'} = (\delta_k), \quad (k = 1, 2, \ldots, t' = t_1 + t_2 + \ldots + t_n),$$

broj $\mu^{hh'}$ prikazati u obliku

$$\mu^{hh'} = \varepsilon\, \delta_1^{e_1} \ldots \delta_{t'}^{e_{t'}}\, \alpha^{l^n}, \tag{2}$$

gdjeno su eksponenti $e_1, \ldots, e_{t_1}$ prosti prema l, eksponenti $e_{t_1+1}, \ldots, e_{t_1+t_2}$ djeljivi točno sa l, nadalje eksponenti

$$e_{t_1+t_2+1}, \ldots, e_{t_1+t_2+t_3}$$

djeljivi točno sa l^2 i t. d.; napokon eksponenti

$$e_{t_1+t_2+\ldots+t_{n-1}+1}, \ldots, e_{t'}$$

točno djeljivi sa l^{n-1}, a ε predočuje jedinicu u k.

Uzmimo, da l^n-vrijednosni rodni karakteri potječu od ideala $\mathfrak{d}_{i_1}, \ldots, \mathfrak{d}_{i_{r_1}}$; l^{n-1}-vrijednosni od ideala $\mathfrak{d}_{i_{r_1}+1}, \ldots, \mathfrak{d}_{i_{r_1}+r_2}$ i t. d.; napokon l-vrijednosni od ideala

$$\mathfrak{d}_{i_{r_1}+r_2+\ldots+r_{n-1}+1}, \ldots, \mathfrak{d}_{i_{r_1}+r_2+\ldots+r_{n-1}+r_n}.$$

K svakoj ćemo kombinaciji jedinica $c_s^{(t)}$, za koju valja jednadžba (1), moći odrediti primaran prost ideal l^n-toga stepena $\mathfrak{p}$ u k tako, da bude

$$\left(\frac{\delta_{i_1}^{e_{i_1}}}{\mathfrak{p}}\right)_n^s = c_1^{(n)}, \ldots, \left(\frac{\delta_{i_{r_1}}^{e_{i_{r_1}}}}{\mathfrak{p}}\right)_n^s = c_{r_1}^{(n)},$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{\delta^{e_{i_{r_1}+1}}_{i_{r_1}+1}}{\mathfrak{p}}\right)^s_n = c_1^{(n-1)}, \ldots, \left(\frac{\delta^{e_{i_{r_1}+r_2}}_{i_{r_1}+r_2}}{\mathfrak{p}}\right)^s_n = c^{(n-1)}_{r_2},$$

— — — — — — — — — — — —

$$\left(\frac{\delta^{e_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}}_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}}{\mathfrak{p}}\right)^s_n = c_1^{(1)}, \ldots, \left(\frac{\delta^{e_{i_{r_1}+\ldots+r_n}}_{i_{r_1}+\ldots+r_n}}{\mathfrak{p}}\right)^s_n = c^{(1)}_{r_n},$$

a uz to, ako je δ kojigod između brojeva $\delta_1, \ldots, \delta_{t'}$, koji je različit od $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_{r_1}}, \delta_{i_{r_1}+1}, \ldots, \delta_{i_{r_1}+r_2}, \ldots, \delta_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}, \ldots, \delta_{i_{r_1}+\ldots+r_n}$, da za svaki takav broj δ bude

$$\left(\frac{\delta}{\mathfrak{p}}\right)^s_n = +1;$$

pri tom je s broj prost prema l.

Iz tih relacija izvodimo, da je

$$\left(\frac{\mu}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1,$$

a stoga se raspada $\mathfrak{p}$ u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ na l^n među sobom različitih prostih ideala. Ako je jedan od njih $\mathfrak{P}$, pak ako stavimo $\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi)$, tako da bude π primaran broj l^n-toga stepena, to se karakterni sustav ideala $\mathfrak{P}^s$ sastoji od karaktera

$$\left(\frac{\pi^s, \mu}{\mathfrak{d}_{i_1}}\right)_n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_1}}\right)^{e_{i_1}s}_n, \ldots, \left(\frac{\pi^s, \mu}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}}}\right)_n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}}}\right)^{e_{i_{r_1}}s}_n,$$

— — — — — — — — — — — —

Digitized by Google

$$\left(\frac{\pi^s,\ \mu}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}}\right)_n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}}\right)_n^{e_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}{}^s}, \ldots, \left(\frac{\pi^s,\ \mu}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}+\ldots+r_n}}\right)_n = \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}+\ldots+r_n}}\right)_n^{e_{i_{r_1}+\ldots+r_n}{}^s}.$$

No poradi posebnoga zakona recipročnosti mora biti

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_1}}\right)_n = \left(\frac{\delta_{i_1}}{\mathfrak{p}}\right)_n, \ldots, \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}}}\right)_n = \left(\frac{\delta_{i_{r_1}}}{\mathfrak{p}}\right)_n,$$

— — — — — — — — — —

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}}\right)_n = \left(\frac{\delta_{i_{r_1}+\ldots+r_{n-1}+1}}{\mathfrak{p}}\right)_n, \ldots, \left(\frac{\pi}{\mathfrak{d}_{i_{r_1}+\ldots+r_n}}\right)_n = \left(\frac{\delta_{i_{r_1}+\ldots+r_n}}{\mathfrak{p}}\right)_n.$$

Prema tomu se sastoji karakterni sustav ideala $\mathfrak{P}^s$ od jedinica $c_1^{(n)}, \ldots, c_{r_1}^{(n)}, \ldots, c_1^{(1)}, \ldots, c_{r_n}^{(1)}$.

Tim je pokazano, da ima $l^{n(r-1)}$ rodova, no budući da prema 18. poučki više od $l^{n(r-1)}$ rodova ne može biti, vidimo, da je broj rodova točno $l^{n(r-1)}$, kako je trebalo dokazati.

Digitized by Google

§ 15.

O primarnom idealu.

26. poučka. Ako je $\mathfrak{a}$ primaran ideal l^n-toga stepena u k, to se dade u k uvijek naći primaran broj l^n-toga stepena α tako, da bude $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$.

Dokaz. Uzmimo, da je $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha^*)$. Za α^* se dade odrediti kongruencija od oblika

$$\alpha^* \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z} \beta^{l^n}, \quad (\Lambda_n),$$

gdjeno je ε jedinica, a β cio broj u k; eksponenti pak $v_1, \ldots, v_m$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, \ldots, l^n-1$, a eksponenti $w_1, \ldots, w_z$ izvjesne vrijednosti $0, 1, \ldots, l^{n-1}-1$. Broj je

$$\mu = \alpha^* \varepsilon^{-1} \varkappa_1^{l^n - v_1} \ldots \varkappa_{v_m}^{l^n - v_m}$$

primaran broj l^n-toga stepena. Stoga mora biti

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\xi, \mu}{\mathfrak{w}}\right)_n = +1$$

za svaku jedinicu ξ tijela k. Uvedemo li tu za ξ po redu jedinice $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, uvjerit ćemo se smjesta, da je $v_1 = v_2 = \ldots = v_m = 0$. Dakle je $\alpha^* \varepsilon^{-1}$ primaran broj l^n-toga stepena.

No i obrnuto valja.

27. poučka. Ako je $\mathfrak{a}$ ideal u k, a α primaran broj l^n-toga stepena u k, pak ako je $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$, to je $\mathfrak{a}$ primaran ideal l^n-toga stepena.

O tom se uvjerimo, ako u jednadžbi 24. poučke uvrstimo za μ broj α, a za ν kojugod jedinicu u k.

Ovdje ćemo još dokazati ovu poučku:

28. poučka. Cio broj μ tijela k onda je i samo onda primaran broj l^n-toga stepena, ako je

Digitized by Google

$$(1) \qquad \mu \equiv \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z} \alpha^{l^n}, (\Lambda_n),$$

gdjeno su $\pi_1, \ldots, \pi_z$ gore određeni primarni brojevi l^n-toga stepena, a α cio broj u k.

Dokaz. Ako za μ vrijedi jednadžba (1), to je μ sigurno primaran broj l^n-toga stepena, budući da je poradi (1)

$$\mu \cdot \pi_1^{l^n - w_1} \ldots \pi_z^{l^n - w_z}$$

primaran broj l^n-toga stepena, no i $\pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z}$ je broj takove vrste; prema tomu dakle i produkt tih dvaju brojeva μ.

Uzmimo naprotiv, da je μ primaran broj l^n-toga stepena, to postoji za μ svakako kongruencija od oblika

$$\mu \equiv \varepsilon \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m} \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z} \alpha^{l^n}, (\Lambda_n),$$

gdjeno je ε jedinica u k, a ostali brojevi imaju poznato značenje. Stoga je broj $\mu^* = \mu\varepsilon^{-1} \varkappa_1^{l^n - v_1} \ldots \varkappa_m^{l^n - v_m}$ primaran broj l^n-toga stepena, te je prema tomu

$$\prod_{(w)}{}' \left(\frac{\xi, \mu^*}{w}\right)_n = +1$$

za svaku jedinicu u k. Uvedemo li za ξ po redu jedinice $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$, uvjerit ćemo se, da je $v_1 = v_2 = \ldots = v_m = 0$; dakle je $\mu\varepsilon^{-1}$ primaran broj l^n-toga stepena, a prema tomu i ε. No jedinica ε može samo onda biti primaran broj l^n-toga stepena, ako je ona l^n-ta potencija jedinice, budući da je uzeto, da je broj razreda u k prost prema l. Tim je 28. poučka dokazana.

Digitized by Google

§ 16.

Hiperprimarni ideal i broj.

29. poučka. Ako je μ hiperprimaran broj l^n-toga stepena u k, a ν makar koji cijeli broj u k, mora biti

$$\prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)_n = +1,$$

ako se produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}{}'$ protegne na sve proste ideale tijela k.

Dokaz je sasvim analogan dokazu u teoriji ostataka l-tih i četvrtih potencija (F. § 17, Lietzmann: Dissertation, Satz 41).

Isto se tako analognim načinom s rečenim teorijama mogu dokazati ove dvije poučke:

30. poučka. Ako je $\mathfrak{a}$ hiperprimaran ideal l^n-toga stepena u k, uvijek se dade naći hiperprimaran broj l^n-toga stepena α u k tako, da bude $\mathfrak{a}^{hh'} = (\alpha)$.

31. poučka. Ako je α hiperprimaran broj l^n-toga stepena u k, uvijek je

$$\left(\frac{\varepsilon_1}{\alpha}\right)_n = +1, \ldots, \left(\frac{\varepsilon_m}{\alpha}\right)_n = +1,$$

$$\left(\frac{\lambda_1}{\alpha}\right)_n = +1, \ldots, \left(\frac{\lambda_g}{\alpha}\right)_n = +1.$$

§ 17.

O relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

32. poučka. Neka bude $\mathfrak{l}_1$ kojigod prost ideal tijela k sadržan u $1-\zeta_n$, pa neka bude $1-\zeta_n$ djeljivo točno l_1-tom potencijom prostoga ideala $\mathfrak{l}_1$. Nadalje neka bude μ cio broj u k, koji nije jednak l-toj potenciji cijela broja istoga tijela k, pa neka bude $\mathfrak{l}_1$ sadržan u μ

Digitized by Google

točno u a-toj potenciji, gdje je $a \equiv 0$, (l^n). Tada ćemo moći naći cio broj μ_1 u k prost prema $\mathfrak{l}_1$ tako, da bude $K(\sqrt[l^n]{\mu}) = K(\sqrt[n]{\mu_1})$.

Označit ćemo sa $\mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_g$ još ostale proste ideale tijela k, koji se sadržavaju u $1-\zeta_n$, pak staviti

$$\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1), \quad \mathfrak{l}_2^{hh'} = (\lambda_2), \ldots, \quad \mathfrak{l}_g^{hh'} = (\lambda_g)$$

tako, da budu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_g$ cijeli brojevi u k.

Napokon neka bude $\mathfrak{p}$ primaran prost ideal l^n-toga stepena, za koji valjaju snošaji

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)_n = \zeta_n, \quad \left(\frac{\lambda_2}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1, \ldots, \left(\frac{\lambda_g}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1,$$

gdjeno je ζ_n primitivan l^n-ti korijen jedinice. Ako je tada π primaran broj l^n-toga stepena, za koji je

$$\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi),$$

to je relativna diskriminanta $D\sqrt[l^n]{\mu,\ k}$ onda i samo onda prosta prema $\mathfrak{l}_1$, ako postoji kongruencija od oblika

$$(1) \qquad \mu_1 \equiv \pi^w \alpha^{l^n}, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

gdjeno eksponent w može imati koju od vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l^n-1$, a α predočuje cio broj u k.

Dokaz. Ako kongruencija (1) postoji, sigurno je $D\sqrt[l^n]{\mu,\ k}$ prosto prema $\mathfrak{l}_1$, jer je $\pi^w \alpha^{l^n}$ primaran broj l^n-toga stepena. Stoga nam valja dokazati samo još obrat.

Neka budu prosti ideali $\mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_g$ u $1-\zeta_n$ sadržani po redu točno u l_2-toj, $\ldots$, l_g-toj potenciji. Odredimo cijeli broj μ^* prema kongruencijama

Digitized by Google

$$(2) \qquad \mu_1 \equiv \mu^*, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l,[nl^n-(n-1)l^{n-1}]} \right),$$

$$(3) \quad \mu^* \equiv \beta^{l^n}, \left(\mathfrak{l}_2^{l_2[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1} \ldots \mathfrak{l}_g^{l_g[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1} \right),$$

gdjeno je β cio broj u k prost prema $\mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_g$. Onda je μ^* primaran broj l^n-toga stepena. Sa $D \sqrt[l^n]{\mu, k}$ bit će uvijek i $D \sqrt[l^n]{\mu^*, k}$ prosto prema $\mathfrak{l}_1$.

Odredimo li primarne proste ideale $\mathfrak{p}_2, \ldots, \mathfrak{p}_g$ l^n-toga stepena u k tako, da bude

$$(4) \qquad \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_s}\right)_n = \xi_n^{(s)}, \quad \left(\frac{\lambda_t}{\mathfrak{p}_s}\right) = +1, \quad (t \neq s),$$

$$(s = 2, 3, \ldots, g),$$

gdje je $\xi_n^{(s)}$ primitivan l^n-ti korijen jedinice, i k tim prostim idealima primarne brojeve l^n-toga stepena $\pi_2, \ldots, \pi_g$ tako, da bude

$$\mathfrak{p}_2^{hh'} = (\pi_2), \ldots, \quad \mathfrak{p}_g^{hh'} = (\pi_g),$$

to mora postojati za μ^* kongruencija od oblika

$$\mu^* \equiv \pi^w \pi_2^{w_2} \ldots \pi_g^{w_g} \alpha^{l^n}, \quad \left((1-\zeta_n)^{nl^n-(n-1)l^{n-1}+1} \right),$$

gdje eksponenti w, w_2,..., w_g imaju koju od vrijednosti 0, 1, 2,..., l^n-1, a α predočuje cio broj u k.

Uzmimo, da je bar jedan između eksponenata w, $w_2, \ldots, w_g$ prost prema l. Poradi (3) raspadaju se tada prosti ideali $\mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_g$ u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\pi^w \pi_2^{w_2} \ldots \pi_g^{w_g}})$ na l^n među sobom različitih prostih ideala prema jednadžbi

Digitized by Google

$$\mathfrak{l}_s = \mathfrak{L}_s \cdot S\mathfrak{L}_s \cdot \ldots \cdot S^{l^n-1}\mathfrak{L}_s$$

$$(s = 2, 3, \ldots, z).$$

Karakterni se sustav ideala $\mathfrak{L}_s$ sastoji od karaktera

$$\left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}}\right)_n, \quad \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_1}\right)_n, \ldots, \quad \left(\frac{\lambda_s}{\mathfrak{p}_z}\right)_n, \quad (s = 2, 3, \ldots, z).$$

Produkt tih karaktera mora biti jednak $+1$. Stoga je poradi (4) $w_2 = w_3 = \ldots = w_z = 0$.

Ako su svi eksponenti w, $w_2, \ldots, w_z$ djeljivi točno sa l^k, $(k < n)$, zaključit ćemo isto tako, da moraju eksponenti $w_2, w_3, \ldots, w_z$ biti jednaki 0, promatrajući tijelo $K(\sqrt[l^n]{\pi^w \pi_2^{w_2} \ldots \pi_z^{w_z}})$.

Tim je 32. poučka dokazana.

§ 18.

Definicija simbola $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}}\right)_n$ za brojeve ν, μ proste prema l.

Definicija. Neka bude

$$\left(1-\zeta_n\right) = \mathfrak{l}_s^{l^s}\mathfrak{L},$$

gdjeno je $\mathfrak{l}_s$ prost ideal, a $\mathfrak{L}$ ideal prost prema $\mathfrak{l}_s$.

Definirat ćemo simbol $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$ jednadžbom

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu, \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)_n^{-1},$$

gdje je μ^* cio broj u k određen prema kongruencijama

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{cases} \mu^* \equiv \mu\,, & \left(\dfrac{ll_s}{l_s}\right), \\ \mu^* \equiv \alpha^{l^n}, & \left(\mathfrak{L}^l\right); \end{cases}$$

α predočuje koji mu drago cijeli broj u k prost prema $\mathfrak{L}$, a produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}'$ valja protegnuti na sve proste ideale tijela k, koji nijesu sadržani u l.

Tom je definicijom simbol $\left(\dfrac{\nu,\ \mu}{l_s}\right)_n$ jednoznačno određen. Za nj valjaju snošaji

$$\left(\frac{\nu\nu',\ \mu}{l_s}\right)_n = \left(\frac{\nu,\ \mu}{l_s}\right)_n \left(\frac{\nu',\ \mu}{l_s}\right)_n,$$

$$\left(\frac{\nu,\ \mu\mu'}{l_s}\right)_n = \left(\frac{\nu,\ \mu}{l_s}\right)_n \left(\frac{\nu,\ \mu'}{l_s}\right)_n.$$

§ 19.

O normnim ostacima tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na l_s.

33. poučka. Ako su ν, ν', μ, μ' cijeli prema l prosti brojevi u k, pa ako je

$$\text{a)}\quad \nu \equiv \nu'\ \alpha^{l^n},\quad \left(l_s^{l_s[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

gdje je α cio broj u k, a l_s prost ideal u k sadržan u $1-\zeta_n$ točno u l^s-toj potenciji, to su brojevi ν, ν' zajedno ili normni ostaci ili normni neostaci tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na l_s; ako li je

$$\text{b)}\quad \mu \equiv \mu'\beta^{l^n},\quad \left(l_s^{l_s[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

gdje je β opet cio broj u k, to je ν u isti mah normni ostatak ili neostatak tjelesa $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, $K(\sqrt[l^n]{\mu'})$ s obzirom na l_s.

Digitized by Google

Dokaz se prislanja sasvim na dokaz analognoga slučaja u teoriji ostataka l-tih potencija (isp. H. Rq. Z. § 33, Satz 47; F. § 21, Satz 50), stoga ga ne ćemo ovdje napose izvesti.

Nadalje valja činjenica

34. poučka. Ako su ν i μ dva cijela broja u k prosta prema l, pa ako je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_s$, to je uvijek

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = +1.$$

I ovoj se poučki prislanja dokaz na dokaz analognoga slučaja teorije ostataka l-tih potencija (isp. H. Rq. Z. § 33, Satz 49; F. § 21, Satz 52).

Napokon ćemo dokazati ovu poučku

35. poučka: Ako su ν, μ dva cijela broja u k prosta prema l, pa ako je

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = +1,$$

to je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_s$.

Dokaz. Dokaz se te poučke razlikuje od dokaza analognoga slučaja teorije ostataka l-tih potencija u toliko, što se prosti ideal $\mathfrak{l}_s$, ako se on raspada u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ na jednake ideale, ne mora raspadati baš na l^n među sobom jednakih prostih ideala, nego je moguće, da se raspadne na l^k među sobom jednakih prostih ideala, gdje je $k < n$.

Stavit ćemo

$$\left(1-\zeta_n\right) = \mathfrak{l}_s^{l^s}\, \mathfrak{L},$$

gdje je $\mathfrak{L}$ ideal prost prema $\mathfrak{l}_s$, pak odrediti cijeli broj μ^* prema kongruencijama

Digitized by Google

$$(1)\quad \begin{cases} \mu^* \equiv \mu\,, & \left(\mathfrak{l}_s^{l_s[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1} \right), \\ \mu^* \equiv 1\,, & \left(\mathfrak{L}^{nl^n-(n-1)l^{n-1}} \right). \end{cases}$$

Zatim ćemo odrediti prost ideal $\mathfrak{p}$ u k tako, da bude

$$\left(\frac{\varepsilon_i}{\mathfrak{p}^n\mu^*}\right)_n = 1\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

$$\left(\frac{\lambda_k}{\mathfrak{p}^n\mu^*}\right)_n = 1\,, \quad (k = 1, 2, \ldots, z),$$

gdje je n cio racionalan broj prost prema l. Onda je $\mathfrak{p}^n\mu^*$ hiperprimaran ideal l^n-toga stepena, pa možemo odrediti hiperprimaran broj l^n-toga stepena α tako, da bude

$$(\alpha) = \mathfrak{p}^{nhh'}\mu^{*hh'}.$$

Stavimo li sada

$$\pi = \frac{\alpha}{\mu^{*hh'}},$$

bit će

$$(\pi) = \mathfrak{p}^{nhh'}.$$

Slično ćemo, ako je σ cio broj u k prost prema l, prosti ideal $\mathfrak{q}$ odrediti tako, da bude

$$(2)\quad \begin{cases} \left(\dfrac{\varepsilon_i}{\mathfrak{q}^{n'}\sigma}\right)_n = 1\,, & (i = 1, 2, \ldots, m), \\ \left(\dfrac{\lambda_k}{\mathfrak{q}^{n'}\sigma}\right)_n = 1\,, & (k = 1, 2, \ldots, z), \\ \left(\dfrac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_n = 1\,, \end{cases}$$

gdje je n' broj prost prema l. Onda je $\mathfrak{q}^{n'}\sigma$ hiperprimaran ideal l^n-toga stepena, pa možemo odrediti hiperprimaran broj l^n-toga stepena β tako, da bude

$$(\beta) = \mathfrak{q}^{n'hh'}\sigma^{hh'}.$$

Digitized by Google

Stavimo li

$$\varkappa = \frac{\beta}{\sigma^{hh'}},$$

to je

$$(\varkappa) = \mathfrak{q}^{n'hh'}.$$

Obazremo li se sada na 29. poučku i na definiciju simbola $\left(\frac{\nu, \mu}{l_s}\right)_n$, uvidjet ćemo smjesta, da je

$$\left(\frac{\sigma, \alpha}{l_s}\right)_n = 1, \quad \left(\frac{\beta, \pi}{l_s}\right) = 1,$$

i s pomoću toga zaključiti, da je

$$\left(\frac{\sigma, \mu}{l_s}\right)_n = \left(\frac{\sigma, \mu^*}{l_s}\right)_n = \left(\frac{\sigma, \mu^{*hh'}}{l_s}\right)_n = \left(\frac{\nu, \pi}{l_s}\right)_n^{-1}$$

i

$$(3) \qquad \left(\frac{\sigma, \pi}{l_s}\right)_n^{-1} = \left(\frac{\sigma^{hh'}, \pi}{l_s}\right)_n^{-1} = \left(\frac{\varkappa, \pi}{l_s}\right)_n.$$

Uzmemo li za σ broj ν, to izlazi, da je

$$\left(\frac{\varkappa, \pi}{l_s}\right)_n = 1 \quad \text{ili}$$

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_n \left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)^{-1} = 1,$$

a budući da je

$$\left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_n = 1,$$

mora biti također

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1.$$

Dokazat ćemo, da je $\varkappa$ relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ cijela broja tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, kojemu je nazivnik prost prema l_s, a tim će biti već i dokazano, da je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ s obzirom na l_s.

Digitized by Google

Pri dokazivanju valja razlikovati tri slučaja.

1) $\mathfrak{p}$ je primaran ideal l^n-toga stepena, a π primaran broj l^n-toga stepena.

Za taj je slučaj dokaz kao u teoriji ostataka l-tih potencija.

2) $\mathfrak{p}$ je primaran ideal l^n-toga stepena, no π nije primaran broj l^n-toga stepena.

Ako π nije ni primaran broj l-toga stepena, dokaz je kao u teoriji ostataka l-tih potencija. No uzmimo, da π nije primaran broj l^n-toga stepena, ali da je primaran broj l^k-toga stepena, gdje je $k < n$, a ne više primaran broj l^{k+1}-toga stepena. U tom slučaju sadržava relativna diskriminanta $D \underset{\sqrt{\pi},\, k}{l^n}$ proste ideale $\mathfrak{p}$ i $\mathfrak{l}_s$ kao faktore i nikakove druge više.

Prema 10. poučki imamo, da je

$$n\,a \leqq n + (n-k) + w - mn - n.$$

No budući da je $w \leqq mn$, izilazi, da je

$$n\,a \leqq n-k,$$

to znači, da je broj A svih dvoličnih kompleksa tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ ponajviše jednak l^{n-k}.

Neka bude $\mathfrak{Z}$ makar koji ideal u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a $\mathfrak{j} = N \underset{\sqrt{\pi},\, k}{l^n}(\mathfrak{Z})$. Stavimo $\mathfrak{j}^{hh'} = (\iota)$. Ako je tada

$$\left(\frac{\iota,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = +1,$$

kazat ćemo, da kompleks, u koji $\mathfrak{Z}$ ide, pripada **glavnome rodu**.

Budući da smo uzeli, da je π primaran broj l^k-toga stepena, mora za svaki prema $\mathfrak{l}_s$ prosti broj ν da bude

$$\left(\frac{\nu,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_k = +1.$$

Digitized by Google

Po tom je $\left(\frac{\nu, \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$ jednako l^{n-k}-tomu korijenu jedinice.

Može se dokazati, da svi ideali tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ ne pripadaju glavnome rodu. U § 25. pokazat ćemo na temelju onoga, što je sprijeda razvijeno, da u našem slučaju tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ uvijek ima u k brojeva σ prostih prema l, za koje je simbol $\left(\frac{\sigma, \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$ jednak primitivnomu l^{n-k}-tom korijenu jedinice. Odredimo li prost ideal $\mathfrak{r}$ prema jednadžbama (2) namjesto $\mathfrak{q}$, to je, kako se vidi iz (3),

$$\left(\frac{\rho, \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = \xi_{n-k},$$

gdjeno je stavljeno $\mathfrak{r}^{hh'} = (\rho)$, a ξ_{n-k} nam predočuje primitivan l^{n-k}-ti korijen jedinice.

Ako je $\mathfrak{R}$ prost ideal tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ sadržan kao faktor u $\mathfrak{r}$, to poradi toga kompleks određen idealom $\mathfrak{R}$ ne pripada glavnome rodu. Neka bude f broj svih kompleksa glavnoga roda u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a f' broj svih kompleksa u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, koji su simbolične $(1-S)$-te potencije kompleksa. Lako se uvjerimo, da je

$$A f' = l^{n-k} f.$$

Budući da je $A \leqq l^{n-k}$, mora biti $f \leqq f'$, no kako je $f' \leqq f$, jer svaka $(1-S)$-ta potencija kompleksa daje kompleks glavnoga roda, mora da bude $f = f'$, a onda je $A = l^{n-k}$, $na = n - k$, $w = mn$, to znači, svaki je kompleks glavnoga roda simbolična $(1-S)$-ta potencija kompleksa, a svaka je jedinica u k jednaka relativnoj normi $N_{\sqrt[l^n]{\pi}, k}$ jedinice ili razlomljena broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$.

Digitized by Google

Sada je lako pokazati, da je $\varkappa$ relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$. Prosti se ideal $\mathfrak{q}$ raspada poradi (2) u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ u l^n među sobom različitih prostih ideala; označimo jedan od njih sa $\mathfrak{Q}$. Budući da je

$$\left(\frac{\varkappa,\ \pi}{l_s}\right)_n = +1,$$

pripada $\mathfrak{Q}$ glavnomu rodu. No kako je svaki kompleks glavnoga roda simbolična $(1-S)$-ta potencija kompleksa, možemo napisati

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}^{(1-S)}\, \mathfrak{A}\, \mathfrak{j},$$

gdje je $\mathfrak{J}$ ideal, $\mathfrak{A}$ broj u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a $\mathfrak{j}$ ideal u k.

Načinimo li relativnu normu $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ ideala $\mathfrak{Q}$, pak dignemo li je na $n'hh'$-tu potenciju, dobit ćemo, ako stavimo

$$\mathfrak{j}^{hh'} = (\gamma),$$

snošaj

$$(\varkappa) = N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}\, (\mathfrak{A}\gamma)^{n'}.$$

Dakle je

$$\xi\varkappa = N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}\, (\mathfrak{A}\gamma)^{n'},$$

gdje je ξ jedinica u k. No budući da je ξ jednako relativnoj normi $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, to je i $\varkappa$ jednako takovoj relativnoj normi. Da se taj broj tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ može prikazati razlomkom, u koga je nazivnik prost prema l_s, lako se razabere, ako se obazremo na to, da je svaki prosti ideal tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ sadržan u l_s jednak l^{n-k}-toj potenciji prosta ideala u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$.

Digitized by Google

Tim je postavljena tvrdnja u tom slučaju dokazana.

3) $\mathfrak{p}$ nije primaran ideal l^n-toga stepena.

Ako $\mathfrak{p}$ nije ni primaran l-toga stepena, dokaz je posve sličan dokazu za analogni slučaj teorije ostataka l-tih potencija.

No uzmimo, da je $\mathfrak{p}$ primaran ideal l^k-toga stepena, a ne više l^{k+1}-toga stepena. Tada je za svaku jedinicu ξ tijela k

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)_k = +1,$$

a moći ćemo u k uvijek naći jedinicu ζ, za koju je

$$\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right)_n = \xi_{n-k},$$

gdje je ξ_{n-k} primitivan l^{n-k}-ti korijen jedinice.

Takova jedinica ζ ne može biti jednaka relativnoj normi $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$. Jer kad bi bilo

$$\zeta = N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}\left(\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{B}_1}\right),$$

gdjeno su $\mathfrak{B}$ i $\mathfrak{B}_1$ cijeli brojevi u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a možemo ih uzeti proste prema $\mathfrak{p}$, imali bismo

$$\left(\frac{N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}(\mathfrak{B}), \pi}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$$

ili dalje

$$\left(\frac{\zeta\, N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}(\mathfrak{B}_1),\ \pi}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1.$$

Stoga je

$$\left(\frac{\zeta,\ \pi}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1 \quad \text{ili} \quad \left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$$

protiv pretpostavke.

Digitized by Google

Jedinica ζ nije dakle relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\,k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$,

a stoga je

$$w \leqq mn - (n-k).$$

Uzmemo li ponajprije, da je π primaran broj l^k-toga stepena, to je $nt = n + (n-k)$, a stoga je

$$a = 0, \quad w = mn - (n-k)$$

Jedinice η, za koje je $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$, čine $l^{mn-(n-k)}$ jediničnih sveza l^n-toga stepena, dok jedinice η', za koje je $\left(\frac{\eta'}{\mathfrak{p}}\right)_n \neq 1$, daju u svem $(l^{n-k}-1)\, l^{mn-(n-k)}$ takovih jediničnih sveza. Posljednje jedinice nijesu jednake relativnim normama $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\,k}$ brojeva tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a stoga su sve jedinice η, za koje je

$$\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1,$$

relativne norme $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\,k}$ brojeva u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$.

Poradi $a = 0$ mora da bude broj idealskih razreda u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ lih broj. Označimo li taj broj sa H, pak odredimo H' tako, da bude $HH' \equiv 1$, (l^n), moći ćemo naći jedinicu ε u k tako, da bude $\varepsilon\, \varkappa^{HH'}$ relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\,k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$. Odatle izlazi

$$\left(\frac{\varepsilon\, \varkappa^{HH'}}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1,$$

a kako je $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$, mora biti $\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$; dakle je ε relativna

Digitized by Google

norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a stoga i $\varkappa$. Broj, kojega je relativna norma jednaka $\varkappa$, možemo očito opet prikazati u obliku razlomka, kojega je nazivnik prost prema l_s.

Još se dade zamisliti samo jedan slučaj: $\mathfrak{p}$ je primaran ideal l^k-toga, ali ne više l^{k+1}-toga stepena, a π je primaran broj $l^{k'}$-toga, ali ne više $l^{k'+1}$-toga stepena, gdje je $k' < k$.

Tu možemo dokazati kao gore, da se dade odrediti jedinica ζ u k, za koju je $\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right)_n = \xi_{n-k}$, gdje je ξ_{n-k} primitivan l^{n-k}-ti korijen jedinice, pak da takova jedinica ζ ne može biti relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$.

Prema 10. poučki valja u našem slučaju relacija

$$na \leqq n + (n-k') + w - mn - n.$$

Budući pak da je poradi $\left(\frac{\zeta}{\mathfrak{p}}\right)_n = \xi_{n-k}$

$$w \leqq mn - (n-k),$$

zaključujemo, da je

$$na \leqq k-k'.$$

Broj je dakle dvoličnih kompleksa u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ ponajviše jednak $l^{k-k'}$.

Budući da smo uzeli, da je π primaran broj $l^{k'}$-toga stepena, mora za svaki prema l_s prosti broj ν da bude

$$\left(\frac{\nu,\ \pi}{l_s}\right)_{k'} = +1.$$

Digitized by Google

Po tom je $\left(\frac{\nu,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$ jednako $l^{n-k'}$-tomu korijenu jedinice.

Neka sada bude $\mathfrak{J}$ kojigod ideal u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a $\mathfrak{j} = N\frac{\mathfrak{p}^n}{\mathfrak{V}_{\pi,\ k}}$ (3). Nadalje neka bude $\mathfrak{j}^{hh'} = (\iota)$. Ako je tada $\left(\frac{\iota,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$ jednako $l^{n-k'}$-tomu korijenu jedinice, moći ćemo odrediti prikladnu potenciju ζ^e jedinice ζ tako, da bude

$$\left(\frac{\zeta^e\iota,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = +1.$$

U tom ćemo slučaju kazati, da $\mathfrak{J}$ pripada glavnomu rodu. U svakom ćemo drugom slučaju moći odrediti ζ^e tako, da

$$\left(\frac{\zeta^e\iota,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$$

bude jednako jednomu između brojeva

$$1,\ \zeta_{k-k'},\ \zeta_{k-k'}^2,\ \ldots,\ \zeta_{k-k'}^{l^{k-k'}-1},$$

gdje je

$$\zeta_{k-k'} = e^{\frac{2\pi i}{l^{k-k'}}}.$$

No kakogod smo pod 1) pokazali na temelju § 25., tako možemo i ovdje pokazati, da se dade odrediti prost ideal $\mathfrak{r}$ u k, koji se u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ raspada na l^n među sobom različitih prostih ideala, od kojih neka bude jedan $\mathfrak{R}$; pak ako stavimo

$$\mathfrak{r}^{hh'} = (\rho),$$

da bude

$$\left(\frac{\rho,\ \pi}{\mathfrak{l}_s}\right)_n$$

Digitized by Google

jednako primitivnomu $l^{n-k'}$-tom korijenu jedinice. Po tom ćemo ζ^e moći odrediti tako, da bude

$$\left(\frac{\zeta^e \rho,\ \pi}{l_s}\right)_n$$

jednako primitivnomu $l^{k-k'}$-tom korijenu jedinice. Kompleks određen idealom $\mathfrak{R}$ ne pripada glavnomu rodu. Ako označimo sa f broj svih kompleksa glavnoga roda u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a sa f' broj onih kompleksa u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, koji su $(1-S)$-te potencije kompleksa, razabiramo neposredno, da je

$$Af' = l^{k-k'} f.$$

Iz $A \leqq l^{k-k'}$ izlazi, da je $f \leqq f'$. Ali mora također da bude $f' \leqq f$, budući da svaka simbolična $(1-S)$-ta potencija kompleksa glavnomu rodu pripada; stoga je $f = f'$, a $A = l^{k-k'}$. Odatle izvodimo dalje, da je $na = k-k'$, $w = mn - (n-k)$.

Jedinice η, za koje je $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$, tvore $l^{mn-(n-k)}$ jediničnih sveza l^n-toga stepena, dok ostale jedinice η', za koje je $\left(\frac{\eta'}{\mathfrak{p}}\right)_n \neq 1$, daju u svem $(l^{n-k}-1)\, l^{mn-(n-k)}$ jediničnih sveza l^n-toga stepena. No jedinice posljednje vrste ne sadržavaju među sobom jedinica, koje bi bile jednake relativnim normama $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\ k}$ brojeva u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$: dakle su sve jedinice, za koje je $\left(\frac{\eta}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1$, relativne norme $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\ k}$ brojeva u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$.

Da sada dokažemo, da je $\varkappa$ jednak relativnoj normi $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\ k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, sjetit ćemo se, da se $\mathfrak{q}$ u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ raspada na l^n među sobom različitih prostih ideala. Budući pak da je $\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)_n = 1$,

Digitized by Google

pripada svaki prosti faktor $\mathfrak{Q}$ tijela $K(\sqrt[l^n]{\pi})$ sadržan u $\mathfrak{q}$ glavnomu rodu, pa kako je svaki kompleks glavnoga roda poradi $f = f'$ simbolična $(1-S)$-ta potencija kompleksa, možemo staviti

$$\mathfrak{Q} = \mathfrak{J}^{(1-S)} \mathrm{A}\, \mathfrak{j},$$

gdje je $\mathfrak{J}$ ideal, A broj u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a $\mathfrak{j}$ ideal u k. Načinimo relativnu normu $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ ideala $\mathfrak{Q}$, pak je dignimo na $hh'n'$-tu potenciju, to ćemo dobiti, ako je

$$\mathfrak{j}^{hh'} = (\gamma),$$
$$(\varkappa) = N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k} (\mathrm{A}\gamma)^{n'};$$

dakle je $\xi\varkappa = N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k} (\mathrm{A}\gamma)^{n'}$, gdje je ξ prikladna jedinica u k. Nazivnik se broja $\mathrm{A}\gamma$ može uvijek uzeti prost prema l_s. Stoga je

$$\left(\frac{\xi\varkappa,\ \pi}{l_s}\right)_n = +1.$$

Budući pak da je

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1,$$

mora dakle biti

$$\left(\frac{\xi}{\mathfrak{p}}\right)_n = +1,$$

te je prema onome, što smo gore razvili, ξ relativna norma $N_{\sqrt[l^n]{\pi},\, k}$ broja u $K(\sqrt[l^n]{\pi})$, a stoga i $\varkappa$.

Tim je 35. poučka potpuno dokazana.

Digitized by Google

§ 21.

Produkt $\prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ za brojeve ν, μ proste prema $1-\zeta_n$.

Analogno teoriji ostataka l-tih potencija mogu se sada dokazati ove poučke:

36. poučka. Ako su ν, μ cijeli prema $1-\zeta_n$ prosti brojevi u k, uvijek je

$$\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{l}_s}\right)_n \quad \left(\frac{\mu, \nu}{\mathfrak{l}_s}\right)_n = +1.$$

37. poučka. Ako su ν, μ cijeli prema $1-\zeta_n$ prosti brojevi u k, valja relacija

$$(1) \qquad \prod_{(\mathfrak{w})} \left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{w}}\right)_n = +1,$$

gdjeno treba produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}$ protegnuti na sve proste ideale tijela k.

(Isp. H. Rq. Z. § 34, § 35; F. § 22).

§ 22.

Zakon recipročnosti i prvi popunidbeni zakon.

Iz jednadžbe (1) predašnjega paragrafa izvodimo ove posebne zakone:

38. poučka. Opći zakon recipročnosti za ostatke l^n-tih potencija u tijelu k.

Ako nam $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_g$ označuju sve proste ideale tijela k sadržane u $1-\zeta_n$, a $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ dva koja mu drago prosta ideala u k, koji nijesu sadržani u $1-\zeta_n$, π, $\varkappa$ pak cijele brojeve u k, za koje je

$$(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}, \quad (\varkappa) = \mathfrak{q}^{hh'},$$

valja jednadžba

$$\left(\frac{\varkappa}{\mathfrak{p}}\right)_n \left(\frac{\pi}{\mathfrak{q}}\right)_n^{-1} = \left(\frac{\pi, \varkappa}{\mathfrak{l}_1}\right)_n \left(\frac{\pi, \varkappa}{\mathfrak{l}_2}\right)_n \cdots \left(\frac{\pi, \varkappa}{\mathfrak{l}_g}\right)_n.$$

Digitized by Google

39. poučka. Prvi popunidbeni zakon općemu zakonu recipročnosti.

Neka budu $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_g$ prosti ideali tijela k sadržani u $1-\zeta_n$, a ε jedinica u k; nadalje $\mathfrak{p}$ prost ideal u k, koji nije sadržan u $1-\zeta_n$, a π cio broj u k, tako da bude $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$; tada valja jednadžba

$$\left(\frac{\varepsilon}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1} = \left(\frac{\varepsilon,\ \pi}{\mathfrak{l}_1}\right)_n \left(\frac{\varepsilon,\ \pi}{\mathfrak{l}_2}\right)_n \cdots \left(\frac{\varepsilon,\ \pi}{\mathfrak{l}_g}\right)_n .$$

§ 23.

Simbol $\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_g}\right)$ za makar koje cijele brojeve ν, μ u k.

Definicija. Ako su ν, μ dva koja mu drago cijela broja u k, a $\mathfrak{l}_1$ prost ideal tijela k sadržan u $1-\zeta_n$ u l_1-toj potenciji, pa ako je $\mathfrak{l}_1$ sadržan u μ točno u a-toj potenciji, odredit ćemo cio broj μ^* u k tako, da bude

$$\mu^* \equiv \mu, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+a}\right),$$

$$\mu^* \equiv \alpha^{l^n}, \quad \left(\mathfrak{l}_2^{l_2[nl^n+(n-1)l^{n-1}]+1} \cdots \mathfrak{l}_g^{l_g[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

gdje je α cio broj u k prost prema $\mathfrak{l}_2, \mathfrak{l}_3, \ldots, \mathfrak{l}_g$, pak definirati simbol $\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n$ jednadžbom

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)^{-1},$$

gdjeno valja produkt $\prod_{(\mathfrak{w})}{}'$ protegnuti na sve proste ideale tijela k, koji nijesu sadržani u $1-\zeta_n$.

Za taj simbol valjaju, kako se lako uvjerimo, relacije

Digitized by Google

$$\left(\frac{\nu_1\,\nu_2,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = \left(\frac{\nu_1,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n \left(\frac{\nu_2,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n,$$

$$\left(\frac{\nu,\,\mu_1\,\mu_2}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = \left(\frac{\nu,\,\mu_1}{\mathfrak{l}_1}\right)_n \left(\frac{\nu,\,\mu_2}{\mathfrak{l}_1}\right)_n,$$

ako su μ_1, μ_2, ν_1, ν_2 cijeli brojevi u k.

§ 24.

Temeljni zakoni za simbol $\left(\frac{\nu,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n$, ako su ν, μ kojigod cijeli brojevi u k.

Kakogod smo dokazali 32. poučku, lako ćemo sada dokazati ovu općeniju:

40. poučka. Ako su ν_1, ν_2, μ_1, μ_2 kakvigod cijeli brojevi u k, a prosti ideal $\mathfrak{l}_1$ u njima po redu sadržan u b_1-, b_2-, a_1-, a_2-toj potenciji, gdjeno je $b_2 \leqq b_1$, $a_2 \leqq a_1$, pak ako ima u k cijelih brojeva α, β, tako da bude

$$\nu_1 \equiv \alpha^{l^n} \nu_2, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

$$\mu_1 \equiv \beta^{l^n} \mu_2, \quad \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

to je uvijek, ako je ν_1 normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu_1})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_1$, također ν_2 l^n-ti normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu_2})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_1$.

Nadalje se dade dokazati kao u teoriji ostataka l-tih potencija (isp. H. Rq. 2. § 38, Satz 58; F. § 25, Satz 59), da valja ova poučka:

41. poučka. Ako su ν, μ dva koja mu drago cijela broja u k, a ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_1$, to je uvijek

$$\left(\frac{\nu,\,\mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = +1.$$

Digitized by Google

No i obrat je te poučke ispravan.

42. poučka. Ako su ν, μ dva cijela broja u k, a

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = +1,$$

to je ν normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_1$.

Dokaz. Pri dokazivanju te poučke valja razlikovati dva slučaja. Neka bude ν djeljiv točno b-tom, a μ točno a-tom potencijom ideala $\mathfrak{l}_1$, pa neka bude

1) $a \equiv 0, (l^n)$. Tada ćemo moći odrediti cio broj $\bar{\lambda}_1$ u k tako, da on bude djeljiv točno sa $\mathfrak{l}_1^{\overline{l^n}}$. Odredimo li broj μ^* prema kongruencijama

$$\bar{\lambda}_1^{l^n}\mu^* \equiv \mu,\ \left(\mathfrak{l}_1^{l_1[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+a+1}\right),$$

$$\mu^* \equiv 1,\ \left(\mathfrak{l}_2^{l_2[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1} \ldots \mathfrak{l}_s^{l_s[nl^n-(n-1)l^{n-1}]+1}\right),$$

to je

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = \left(\frac{\nu,\ \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = +1.$$

Ako $\mathfrak{l}_1$ u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu^*})$ ostaje nerastvoren, lako se dade pokazati, da mora biti b djeljiv sa l^n (isp. F. § 25, Satz 28). Posve analogno možemo pokazati, ako je $\mathfrak{l}_1$ u $K(\sqrt[l^n]{\mu^*})$ raspada na l^k među sobom različitih prostih ideala, da mora biti b djeljiv točno sa l^k.

Prema tomu ćemo moći u svakom slučaju odrediti cio broj A u $K(\sqrt[l^n]{\mu^*})$ tako, da bude

$$\frac{\nu}{N_{\sqrt[l^n]{\mu^*},\ k}(A)} = \frac{\rho}{\sigma},$$

Digitized by Google

gdjeno su ρ, σ cijeli brojevi u k prosti prema $\mathfrak{l}_1$. No tada je

$$\left(\frac{N_{\sqrt[l^n]{\mu^*},k}(A)\frac{\rho}{\sigma},\ \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = \left(\frac{\rho\sigma^{l-1},\ \mu^*}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = 1.$$

Stoga je $\rho\sigma^{l-1}$ normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu^*})$ s obzirom na $\mathfrak{l}_1$: dakle i ν. Isto valja dakako i za tijelo $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

Ako je nadalje

2) $a \not\equiv 0$, (l^n), dokazat ćemo ispravnost poučke baš onako, kako se dokazuje analogna poučka teorije ostataka l-tih potencija.

§ 25.

Produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{w}}\right)$ za makar koje brojeve ν, μ i drugi popunidbeni zakon.

Sada se dade lako dokazati, da valja ovaj općeni zakon:

43. poučka. Ako su ν, μ dva koja mu drago cijela broja u k, to je uvijek

$$(1) \qquad \prod_{(\mathfrak{w})}\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{w}}\right)_n = +1,$$

ako se produkt $\prod\limits_{(\mathfrak{w})}$ protegne na sve proste ideale tijela k.

Jednadžba (1) sadržava zakon recipročnosti za ostatke l^n-tih potencija tijela k u najopćenijem obliku.

Stavimo li $\nu = \lambda_1$, $\mu = \pi$, gdje je $(\pi) = \mathfrak{p}^{hh'}$, a $\mathfrak{p}$ prost ideal u k, dobit ćemo iz (1) drugi popunidbeni zakon općemu zakonu recipročnosti.

44. poučka. Ako su $\mathfrak{l}_1, \mathfrak{l}_2, \ldots, \mathfrak{l}_z$ prosti ideali tijela k sadržani u $1-\zeta_n$, a $\mathfrak{l}_1^{hh'} = (\lambda_1)$, ako je nadalje $\mathfrak{p}$ prost ideal tijela k, koji nije sadržan u $1-\zeta_n$, i ako napokon stavimo

$$\mathfrak{p}^{hh'} = (\pi),$$

Digitized by Google

gdje je π cio broj u k, to valja jednadžba

$$\left(\frac{\lambda_1}{\mathfrak{p}}\right)_n^{-1} = \left(\frac{\lambda_1, \pi}{l_1}\right)_n \left(\frac{\lambda_1, \pi}{l_2}\right)_n \cdots \left(\frac{\lambda_1, \pi}{l_g}\right)_n .$$

§ 26.

O broju normnih ostataka tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$.

45. poučka. Ako nam $\mathfrak{p}$ predočuje prost ideal tijela k, koji nije sadržan u $1-\zeta_n$, a nije sadržan ni u relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$, to je svaki prema $\mathfrak{p}$ prost broj ν tijela k normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$.

Ako li je $\mathfrak{p}$ sadržan kao faktor u relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^s]{\mu},\, k}$, ali ne u relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^{s-1}]{\mu},\, k}$, pak ako nam e znači kojigod cio pozitivan racionalan eksponenat, to je od svih mogućih prema $\mathfrak{p}$ prostih, a s obzirom na $\mathfrak{p}^e$ među sobom inkongruentnih brojeva u k, l^{n-s}-ti dio normnih ostataka tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na $\mathfrak{p}$.

Dokaz je lako načiniti s pomoću svojstava simbola $\left(\frac{\nu, \mu}{\mathfrak{p}}\right)_n$.

46. poučka. Neka bude l_1 prost faktor broja $1-\zeta_n$, pa neka bude l_1 u $1-\zeta_n$ sadržan točno u l_1-toj potenciji. Ako tada relativna diskriminanta $D_{\sqrt[l^n]{\mu},\, k}$ nije djeljiva sa l_1, to je svaki prema l_1 prost broj tijela k normni ostatak tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na l_1.

Ako li je l_1 sadržan kao faktor u relativnoj diskriminanti $D_{\sqrt[l^s]{\mu},\, k}$, ali ne u $D_{\sqrt[l^{s-1}]{\mu},\, k}$, pak ako obilježimo sa L po volji eksponenat veći od l_1 $[nl^n-(n-1)l^{n-1}]$, to je od svih mogućih prema l_1 prostih, a s obzirom na $l_1{}^L$ inkongruentnih brojeva ν tijela k točno l^{n-s}-ti dio normnih ostataka tijela $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ s obzirom na l_1.

Digitized by Google

Dokaz. Ako $\mathfrak{l}_1$ nije sadržan u relativnoj diskriminanti $D\,\underset{\sqrt{\mu},\,k}{l^n}$, možemo uzeti, da je μ prost prema $\mathfrak{l}_1$. Za broj μ^* određen prema kongruencijama (1) § 18. postojat će kongruencija od oblika

$$\mu^* \equiv \pi_1^{w_1}\ \alpha^{l^n},\ \left((1-\zeta_n)^{nl^n-(n-1)l^{n-1}}\right),$$

gdje je π_1 primaran broj l^n-toga stepena (isp. 14. poučku), a α cio broj u k, eksponenat pak w_1 ima koju od vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l^{n-1}-1$. Prema tomu možemo napisati snošaj

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\nu,\ \pi_1^{w_1}}{\mathfrak{w}}\right)_n^{-1},$$

pa budući da je π_1 primaran broj l^n-toga stepena, mora biti

$$\left(\frac{\nu,\ \mu}{\mathfrak{l}_1}\right)_n = +1,$$

kako zahtijeva 46. poučka.

Da dokažemo drugi dio 46. poučke, uzet ćemo ponajprije, da je μ prost prema $\mathfrak{l}_1$. Odredimo k broju μ broj μ^* prema kongruencijama (1) § 18. Za μ^* valjat će prema 14. poučki kongruencija od oblika

$$\mu^* \equiv \varepsilon_1^{u_1} \ldots \varepsilon_m^{u_m}\, \varkappa_1^{v_1} \ldots \varkappa_m^{v_m}\, \pi_1^{w_1} \ldots \pi_z^{w_z}\, \alpha^{l^n},\ \left(\Lambda_n\right),$$

gdje nam eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ imaju izvjesne između vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l^n-1$, a eksponenti $\pi_1, \ldots, \pi_g$ izvjesne vrijednosti $0, 1, 2, \ldots, l^{n-1}-1$; α pak nadaje prikladan cio broj u k.

Ako je sada relativna diskriminanta $D\,\underset{\sqrt{\mu},\,k}{l^s}$ djeljiva sa $\mathfrak{l}_1$, ali relativna diskriminanta $D\,\underset{\sqrt{\mu}\ k}{l^{s-1}}$ više nije, moraju svi eksponenti $u_1, \ldots, u_m, v_1, \ldots, v_m$ biti djeljivi sa l^{s-1}, ali bar jedan među

Digitized by Google

njima ne smije biti djeljiv sa l^s. Uzmimo, da je zaista tako, pa da n. pr. u_i nije djeljiv sa l^s. Onda je

$$\left(\frac{\varkappa_i,\ \mu}{l_1}\right)_n = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varkappa_s,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)_n = \left(\frac{\varepsilon_i}{q_i}\right)_n^{u_i} = \xi_{n-s}\ ,$$

gdjeno je ξ_{n-s} primitivan l^{n-s}-ti korijen jedinice. Ako li pak v_t nije djeljiv sa l^s, to je

$$\left(\frac{\varepsilon_t,\ \mu}{l_1}\right)_n = \prod_{(\mathfrak{w})}{}' \left(\frac{\varepsilon_t,\ \mu^*}{\mathfrak{w}}\right)_n = \left(\frac{\varepsilon_t}{q_t}\right)^{v_t} = \zeta_{n-s}\ ,$$

gdje je opet ζ_{n-s} primitivan l^{n-s}-ti korijen jedinice.

Vidimo dakle, da simbol $\left(\frac{\nu,\ \mu}{l_1}\right)_n$ u tom slučaju za brojeve ν proste prema l_1 može da postigne l^{n-s} vrijednosti, naime

$$1,\ \zeta_{n-s},\ \zeta^2_{n-s} \ldots,\ \zeta^{l^{n-s}-1}_{n-s}\ .$$

Na temelju toga možemo lako pokazati, da je ispravna tvrdnja 46. poučke o pravom broju normnih ostataka (isp. H. Rq. Z. § 40.).

Ako je pak μ djeljiv sa l_1, dokazat ćemo 46. poučku na sličan način (isp. moju radnju u „Radu" Jug. akad. knjiga 163., § 14.).

Još bih ovdje spomenuo, da se s pomoću onoga, što je sprijeda razvijeno, dade pokazati, da je broj rodova u tijelu $K(\sqrt[l^n]{\mu})$ jednak točno $l^{n(r-1)}$ i da je produkt karakterâ svakoga roda jednak $+1$ (isp. opet moju radnju u 163. knjizi „Rada").

Digitized by Google

O kubičnoj hiperboli.

Primljeno u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 5. srpnja 1906.

NAPISAO ČLAN DOPISNIK DR. JURAJ MAJCEN.

Metričkim svojstvima kubičnih prostornih krivulja bavili su se: Loria[1], Schröter, Sturm i Mehmke[2], Geisenheimer[3], Timerding, Krüger[4], Duporcq[5] i dr.

No koliko mi je poznato, nijesu ispitana upravo ona svojstva kubične hiperbole, koja su poradi analogije s hiperbolom 2. reda najbliža, a odnose se na svezu među točkama, asimptotama, asimptotičkim i oskulacionim ravninama, pa tangentama ove krivulje.

U recima, koji slijede, nanizao sam nekoliko takovih, ponajviše metričkih svojstava, koja sam našao istražujući jednu transformaciju. Ova se svojstva valjada zato nijesu dosada opazila, jer ne vrijede reelno za sve vrste kubičnih krivulja, koje se obično zajednički istražuju. Napose se bavio samo Schröter[6] metričkim svojstvima kubične parabole, a nekoliko takovih svojstava prikazuje Reye u svojem spisu: „Der gegenwärtige Stand unserer Kenntnis der kubischen Raumkurven, Festschrift, herausgeg. von der Mathematischen Gesellschaft in Hamburg, 1890.“, pa se obazire i na kubičnu hiperbolu kao posebnu vrstu. No ni u ovom se spisu ne spominje nijedan zakon, koji sam dokazao u ovoj radnji.

---

[1] *Rendiconti della R. Accademia di Napoli*, 1885.
[2] *Zeitschrift für Mathematik u. Physik*, XL.
[3] *Zeitschr. für Math. u. Ph.*, XXXI.
[4] *Zeitschr. für Math. u. Ph.*, XL.
[5] *Nouvelles annales de Mathématiques*, 1898., str. 53.
[6] *Mathem. Annalen*, XXV., str. 293.

Digitized by Google

1. Koordinatni ćemo sustav namjestiti tako, da jedna asimptota c_s bude u osi z, druga b_s paralelna sa y u ravnini xOy, a treća a_s da bude paralelna s osju x.

Kubična će se hiperbola k_h^3 lako predočiti s pomoću dvaju valjaka, od kojih je jedan paralelan s osju z, drugi s osju x. Jednadžbe će ovih valjaka biti, ako se označe dužine bridova EA, EH, EF na paralelepipedu $AEHGODFB$, što ga određuju asimptote, sa a, b, c (B, D, G jesu na x, y, z):

$$xy - ay - bx = 0 \quad \text{i} \quad yz - bc = 0.$$

Oba valjka imadu zajedničku izvodnicu u neizmjerno dalekoj ravnini, pa je ova izvodnica u ravnini xOz. Svaka ravnina, koja je paralelna s ravninom xOz, sjeći će krivulju u jednoj samo konačnoj točki. Prema tomu će se s pomoću parametra λ dobiti za krivulju jednadžbe u parametarskom obliku:

$$y = \lambda, \qquad x = \frac{a\lambda}{\lambda - b}, \qquad z = \frac{bc}{\lambda}.$$

Ako je $P(x', y', z')$ makar koja točka krivulje, položit ćemo njom tri ravnine, od kojih je svaka paralelna sa dvije asimptote, a siječe treću u jednoj točki, koja će biti obilježena sa Q_a, Q_b, dotično Q_c. Ove će točke imati koordinate

$$Q_a\,(x',\ b,\ c), \quad Q_b\,(a,\ y',\ 0), \quad Q_c\,(0,\ 0,\ z')$$

Volumen tetraedra $PQ_aQ_bQ_c$ bit će dakle (isp. za ω čl. 8.):

$$V = \frac{\omega}{6}\begin{vmatrix} x' & y' & z' & 1 \\ x' & b & c & 1 \\ a & y' & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z' & 1 \end{vmatrix} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

Ako se ovdje za x', y', z' umetnu parametričke koordinate točke P i točaka Q, pokazat će se, da je $V = 0$. Imademo zato ovaj poučak:

Polože li se makar kojom točkom kubične hiperbole tri ravnine, od kojih je svaka paralelna s dvije asimptote, dobit će se svaki put jedno sjecište na trećoj asimptoti, a ova će tri sjecišta biti s izabranom točkom krivulje u istoj ravnini.

Digitized by Google

2. Trokut $Q_aQ_bQ_c$ možemo ukratko obilježiti sa T_P. Projiciramo li ovakov trokut T_P, koji pripada točki P krivulje, paralelno s osju z na ravninu xOy, bit će ploština projekcije

$$T_{xy} = \frac{\sin\gamma}{2}\begin{vmatrix} x' & b & 1 \\ a & y' & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{a(\lambda^2-b\lambda+b^2)}{2(\lambda-b)}\sin\gamma,$$

gdje je γ kut, što ga čine asimptote a_s i b_s.

Isto će se tako dobiti ploštine projekcija na druge dvije ravnine koordinatâ:

$$T_{yz} = \frac{-c(\lambda^2-b\lambda+b^2)}{2\lambda}\sin\alpha,\quad T_{xz} = \frac{-ac(\lambda^2-b\lambda+b^2)}{2\lambda(\lambda-b)}\sin\beta,$$

gdje je opet $\alpha = (b_sc_s)$, $\beta = (a_sc_s)$.

Bit će dakle:

$$T_{xz} : T_{yz} = \frac{a\sin\beta}{\lambda-b} : \sin\alpha = \frac{a\lambda\sin\beta}{\lambda-b} : \lambda\sin\alpha = x\sin\beta : y\sin\alpha.$$

Ako d_1 i d_2 znače normalne udaljenosti točke P od ravninâ xOz i yOz, moći će se s pomoću sferne trigonometrije lako naći, da je (bez obzira na predznak)

$$d_1 = y\sin\alpha \,.\, \sin Z$$
$$d_2 = x\sin\beta \,.\, \sin Z,$$

gdje Z znači plošni kut obadviju ravnina koordinatâ, koje se sijeku u osi z. Imat ćemo dakle razmjer:

$$T_{xz} : T_{yz} = d_2 : d_1.$$

Učini li se isto za druge dvije pobočke paralelepipeda $\Pi \equiv AEHGODFB$, koje idu istom asimptotom (b_s ili a_s), dobit će se opet dva razmjera:

$$T'_{yz} : T'_{xy} = \delta_1 : \delta_3,$$
$$T''_{xy} : T''_{xz} = \Delta_3 : \Delta_2.$$

Digitized by Google

Iz ova tri razmjera dobivamo ovaj:

$$T_{xz} \cdot T'_{yz} \cdot T''_{xy} : T_{yz} \cdot T'_{xy} \cdot T''_{xz} = \delta_1 d_2 \Delta_3 : d_1 \Delta_2 \delta_3 .$$

No budući da su plošine projekcijâ istoga trokuta T_P na paralelne pobočke paralelepipeda jednake, dakle budući da je

$$T_{xz} = T''_{xz}, \quad T'_{yz} = T_{yz}, \quad T''_{xy} = T'_{xy},$$

bit će

$$d_1 \Delta_2 \delta_3 = \delta_1 d_2 \Delta_3 \ldots\ldots (1^*).$$

Imademo dakle ovaj poučak:

Šest udaljenosti makar koje točke P krivulje k^3_h od pobočaka na Π *možemo kombinirati po tri u dvije grupe tako, da je produkt dužinâ prve grupe jednak produktu dužinâ u drugoj grupi.*

Na paralelepipedu Π bit će svagda dva ugla, kroz koje ne prolazi nijedna asimptota. Normalne udaljenosti točke P na krivulji od one tri pobočke paralelepipeda, koje se sijeku u jednome od ona dva ugla, čine jednu gore spomenutu grupu, one druge tri drugu grupu.

Povuku li se točkom P krivulje tri paralele s asimptotama a_s, b_s i c_s, sjeći će svaka od njih dvije suprotne pobočke paralelepipeda u dvije točke i to: ravninu yOz i paralelnu pobočku u točkama D_1 i D_2, ravninu xOz i suprotnu pobočku u D_5 i D_6, napokon ravninu xOz i suprotnu pobočku u točkama D_4 i D_3. Ako se dužine, što ih točka P čini sa šest točaka D_i, redom kako su spomenute, označe sa d'_2, δ'_3, δ'_1, Δ'_2, d'_1, Δ'_3, bit će poradi posljednjega resultata (apsolutno):

$$\delta'_1 d'_2 \Delta'_3 = d'_1 \Delta'_2 \delta'_3 .$$

Točke D_i imadu koordinate:

$$D_1\left(0, \lambda, \frac{bc}{\lambda}\right), \quad D_5\left(\frac{a\lambda}{\lambda - b}, \lambda, 0\right); \quad D_4\left(\frac{a\lambda}{\lambda - b}, 0, \frac{bc}{\lambda}\right),$$

$$D_3\left(\frac{a\lambda}{\lambda - b}, b, \frac{bc}{\lambda}\right), \quad D_2\left(a, \lambda, \frac{bc}{\lambda}\right), \quad D_6\left(\frac{a\lambda}{\lambda - b}, \lambda, c\right).$$

Digitized by Google

Oba tetraedra $PD_1D_3D_5$; $PD_2D_4D_6$ imat će volumene

$$V_{P135} = \frac{\omega}{6} \cdot \frac{abc}{\lambda - b} \begin{vmatrix} 1 & \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 & 1 \\ 1 & \lambda & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{abc}{6}\omega$$

$$V_{P246} = -\frac{ac\lambda}{6}\omega \begin{vmatrix} 1 & \frac{b}{\lambda} & 1 \\ \frac{b}{\lambda - b} & 0 & 0 \\ \frac{\lambda}{\lambda - b} & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{abc}{6}\omega.$$

Imademo dakle ovaj poučak:

Paralelepiped Π *određuje na tri pravca, koji su povučeni makar kojom točkom* P *krivulje paralelno s tri asimptote, šest točaka. Tri su od ovih točaka u pobočkama paralelepipeda, što se sijeku u jednom uglu, kroz koji ne ide nijedna asimptota. Ove tri točke određuju sa* P *jedan tetraedar, a ostale tri točke sa* P *drugi tetraedar. Obujmi ovih tetraedara jednaki su; svaki je jedna šestina paralelepipeda* Π. *Ovi dakle obujmi nijesu zavisni o izboru točke* P *na krivulji.*

3. Neka je $P(\xi, \eta, \zeta)$ makar koja točka krivulje k_h^3. Bit će:

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = -\frac{ab}{(\lambda - b)^2}, \quad \frac{d\eta}{d\lambda} = 1, \quad \frac{d\zeta}{d\lambda} = -\frac{bc}{\lambda^2}$$

$$\frac{d^2\xi}{d\lambda^2} = \frac{2ab}{(\lambda - b)^3}, \quad \frac{d^2\eta}{d\lambda^2} = 0, \quad \frac{d^2\zeta}{d\lambda^2} = \frac{2bc}{\lambda^3}.$$

Prema tomu je jednadžba oskulacione ravnine u točki P:

$$\begin{vmatrix} x(\lambda - b) - a\lambda & y - \lambda & \lambda z - bc \\ -\frac{ab}{\lambda - b} & 1 & -\frac{bc}{\lambda} \\ \frac{a}{(\lambda - b)^2} & 0 & \frac{c}{\lambda^2} \end{vmatrix} = 0$$

ili

$$c(\lambda - b)^3 x - ab^2 c\, y - a\lambda^3 z + ac\lambda^2(3b - \lambda) = 0 \ldots\ldots (\rho).$$

Digitized by Google

Asimptote krivulje imadu jednadžbe:

$$a_s \ldots \begin{cases} y = b \\ z = c \end{cases}, \quad b_s \ldots \begin{cases} x = a \\ z = 0 \end{cases}, \quad c_s \ldots \begin{cases} x = 0 \\ y = 0. \end{cases}$$

Probodišta A_s, B_s, C_s oskulacione ravnine s asimptotama bit će:

$$A_s) \quad x_1 = a\,\frac{b^3+\lambda^3-\lambda^2(3b-\lambda)}{(\lambda-b)^3}, \; y_1 = b, \; z_1 = c,$$

$$B_s) \quad x_2 = a, \; y_2 = \frac{(\lambda-b)^3+\lambda^2(3b-\lambda)}{b^2}, \; z_2 = 0,$$

$$C_s) \quad x_3 = 0, \; y_3 = 0, \; z_3 = c\,\frac{3b-\lambda}{\lambda}.$$

Koordinata se x_1 može prikazati i ovako:

$$x_1 = \frac{(2a\lambda+ab)(\lambda-b)^2}{(\lambda-b)^3} = a\,\frac{2\lambda+b}{\lambda-b} = \frac{3a\lambda}{\lambda-b} - a = 3\xi - a.$$

Još će se jednostavnije dobiti, da je

$$y_2 = 3\eta - b, \quad z_3 = 3\zeta - c.$$

S pomoću ovoga resultata moći će se odrediti oskulaciona ravnina u makar kojoj točki krivulje po ovom pravilu:

Prenesu li se dužine $3\xi-a$, $3\eta-b$, $3\zeta-c$ *(gdje su* ξ, η, ζ *koordinate makar koje točke krivulje) na asimptote* a_s, b_s, c_s *od točaka* A, B, *dotično* O, *odredit će krajne točke tih dužina* ***oskulacionu ravninu*** *točke* ξ, η, ζ.

S pomoću ovoga resultata moći će se lako izvesti poznati zakon, da je točka ξ, η, ζ težište trokuta $A_s B_s C_s$.

4. Uzet ćemo jednostavnije koordinate za vrhove ovoga trokuta, pa ćemo odrediti ploštine projekcijâ njegovih na ravnine koordinatâ. Ploština trokuta, koji je projekcija (paralelna s osju z) trokuta $A_s B_s C_s \equiv T'$ na ravninu xOy, bit će:

$$T'_{xy} = \frac{\sin\gamma}{2}\begin{vmatrix} 3\xi-a & b & 1 \\ a & 3\eta-b & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3a\lambda^2}{\lambda-b}\cdot\sin\gamma.$$

Digitized by Google

Isto će se tako dobiti ploštine ostalih dvaju trokuta:

$$T'_{yz} = -\frac{3c}{\lambda}(\lambda - b)^2 \sin\alpha, \quad T'_{xz} = -\frac{3ab^2c}{\lambda(\lambda - b)}\sin\beta.$$

Prema tomu će biti

$$T'_{xy} \cdot T'_{yz} \cdot T'_{xz} = 27a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma \ldots\ldots (2).$$

Imademo dakle ovaj poučak:

Produkt ploštinâ za tri projekcije makar kojega trokuta T' (koji određuje oskulaciona ravnina s asimptotama krivulje) na tri ravnine, od kojih je svaka paralelna s dvije asimptote, bit će konstantna veličina.

5. Za određene veličine parametra λ naći će se iz jednadžbe oskulacione ravnine (ρ) lako jednadžbe asimptotičkih ravnina kroz asimptote a_s, b_s, dotično c_s:

$$\alpha_s \ldots\ldots cy + bz - 2bc = 0$$
$$\beta_s \ldots\ldots cx - az - ac = 0$$
$$\gamma_s \ldots\ldots bx + ay = 0.$$

Jednadžba ravnine $V = 0$ (čl. 1.) bit će:

$$V \equiv \begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x' & b & c & 1 \\ a & y' & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z' & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ili, ako se za x', y', z' umetnu parametričke koordinate:

$$c(b - \lambda)x + acy + a\lambda z - abc = 0.$$

Ako se upotrijebi poznati kriterij za paralelizam pravca i ravnine, prepoznat će se, da je ova ravnina V paralelna s tri brida asimptotičke prizme. Za određenje asimptotičkih ravnina imat ćemo prema tomu ovo pravilo:

Ravnine $V = 0$ za makar koje dvije točke kubične hiperbole sjeći će se u pravcu, koji je paralelan s bridima asimptotičke prizme.

Digitized by Google

S pomoću jednadžbe za ravninu V dade se lako izvesti, da su dijagonalni prerezi paralelepipeda Π, od kojih je svaki paralelan s jednom asimptotom krivulje, paralelni s tri asimptotičke ravnine. One tri dijagonalne ravnine paralelepipeda sijeku se u istom pravcu, koji je dijagonala (DH) paralelepipeda, i to ona, koje ne siječe nijedna asimptota. Asimptotičke će se dakle ravnine najlakše odrediti s pomoću ove osobite dijagonale (DH).

Asimptotičke ravnine sijeku ravninu xOy u trokutu

$$\alpha'_s \ldots\ldots y-2b=0,$$

$$\beta'_s \ldots\ldots x-a=0,$$

$$\gamma'_s \ldots\ldots bx+ay=0.$$

Dijagonala DH siječe ravninu xOy u točki $D(0, b, 0)$. Kako je dakle ova točka D **težište** trokuta $(\alpha'_s\beta'_s\gamma'_s)$, bit će i pravac DH **težišnica** asimptotičke prizme. Na pravcu će DH biti prema tomu težište svakoga trokuta, u kojem oskulaciona ravnina krivulje siječe asimptotičku prizmu. — Pravac je DH dvostruka imaginarna sekanta krivulje. S pomoću njegovih jednadžbi

$$\frac{x}{a}=\frac{y-b}{-b}=\frac{z}{c}$$

dobivaju se obje vrijednosti za parametre sjecištâ: $\lambda=\frac{b}{2}(1\pm i\sqrt{3})$.

6. Makar koja oskulaciona ravnina (ρ) siječe tri asimptotičke ravnine u trokutu A'', B'' C'', tako da je

$$A''\equiv(\rho\,\beta_s\,\gamma_s),\quad B''\equiv(\rho\,\alpha_s\,\gamma_s),\quad C''\equiv(\rho\,\alpha_s\,\beta_s).$$

Koordinate točke A'' bit će

$$x_1=\frac{a\lambda}{\lambda-b},\quad y_1=-\frac{b\lambda}{\lambda-b},\quad z_1=\frac{bc}{\lambda-b}.$$

Koordinate točaka B'' i C'' bit će opet:

$$x_2=-\frac{a\lambda}{b},\quad y_2=\lambda,\quad z_2=\frac{c(2b-\lambda)}{b}$$

$$x_3=\frac{a(\lambda+b)}{\lambda},\quad y_3=\frac{b(2\lambda-b)}{\lambda},\quad z_3=\frac{bc}{\lambda}.$$

Digitized by Google

Koordinate x_1, y_2, z_3 imadu prema tomu iste vrijednosti, kao i koordinate oskulacione točke P. Bridove prizme, koju čine tri asimptotičke ravnine, možemo obilježiti ovako:

$$(\alpha_s\ \beta_s) \equiv c_0, \quad (\alpha_s\ \gamma_s) \equiv b_0, \quad (\beta_s\ \gamma_s) \equiv a_0.$$

Asimptota a_s i brid a_0 neka su p r i p a d n i pravci, a isto tako b_s i b_0; c_s i c_0. Imamo ovaj poučak:

Polože li se makar kojom točkom P krivulje k_h^3 tri ravnine, od kojih je svaka paralelna s d v i j e asimptote, sjeći će svaka ova ravnina onaj brid asimptotičke prizme, koji je p r i p a d a n t r e ć o j asimptoti, u točki (A'', B'', dotično C''), a ove će tri točke odrediti o s k u l a c i o n u r a v n i n u točke P.

7. Trokut $A''B''C''$, u kojem siječe oskulaciona ravnina tri asimptotičke ravnine, nazvat ćemo T''. Ploština projekcije svakoga trokuta T'' na ravninu xOy bit će

$$T''_{xy} = \frac{a \sin\gamma}{2\lambda(\lambda - b)} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \lambda \\ \lambda & -\lambda & \lambda - b \\ \lambda + b & 2\lambda - b & \lambda \end{vmatrix} = \frac{3a\lambda^2}{2(\lambda - b)} \sin\gamma.$$

Isto će se tako odrediti ploštine ovoga trokuta T'' na ostale dvije ravnine koordinatâ, pa će biti:

$$T''_{yz} = \frac{c \sin\alpha}{2\lambda(\lambda - b)} \begin{vmatrix} 0 & 3b - \lambda & 3b \\ -\lambda & b & \lambda \\ 3\lambda - b & 0 & b \end{vmatrix} = -\frac{3c(\lambda - b)^2}{2\lambda} \sin\alpha$$

$$T''_{xz} = \frac{ac \sin\beta}{2b\lambda(\lambda - b)} \begin{vmatrix} 0 & 3b - \lambda & \lambda \\ \lambda & b & -b \\ b & 0 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{3ab^2c}{2\lambda(\lambda - b)} \sin\beta.$$

Prije svega se vidi, da je produkt ploštinâ za ove tri projekcije k o n s t a n t n a veličina $\frac{27}{8}\, a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$, a s obzirom na ploštine triju projekcijâ trokuta T' (čl. 4.) imademo ovaj zakon:

Oskulaciona ravnina makar koje točke na krivulji k_h^3 siječe tri asimptote u vrhovima trokuta T', koji ima d v a p u t veću ploštinu od onoga trokuta T'', u kojem ista oskulaciona ravnina siječe tri asimptotičke ravnine.

Digitized by Google

Spojimo li dva i dva istoimena vrha trokutâ $A''B''C''$ i $A_sB_sC_s$, dobit ćemo jednadžbe pravaca:

$$A''A_s \ldots . \quad \frac{x-(3x_1-a)}{-a(\lambda+b)} = \frac{y-b}{-b(2\lambda-b)} = \frac{z-c}{c(2b-\lambda)}$$

$$B''B_s \ldots . \quad \frac{x-a}{-a(\lambda+b)} = \frac{y-(3y_1-b)}{-b(2\lambda-b)} = \frac{z}{c(2b-\lambda)}$$

$$C''C_s \ldots . \quad \frac{x}{a(\lambda+b)} = \frac{y}{b(2\lambda-b)} = \frac{z-(3z_1-c)}{-c(2b-\lambda)}.$$

Ovi su pravci paralelni, zato možemo reći:

Oskulaciona ravnina makar koje točke na krivulji k_h^3 siječe tri asimptote u vrhovima trokuta T'', a asimptotičke ravnine u stranama trokuta T''. Ovi su trokuti perspektivni za neizmjerno daleko središte.

Poradi toga, što je središte kolineacije za oba trokuta T' i T'' neizmjerno daleko, bit će i težišta ovih trokuta kolinearne točke. S pomoću ovoga resultata moći će se odrediti asimptote krivulje, ako su poznate njezine asimptotičke ravnine. Oskulaciona će ravnina makar koje točke sjeći asimptotičku prizmu u trokutu T'', a njezinu baricentričku os (isp. svršetak čl. 5.) u točki, koja s oskulacionom točkom određuje smjer neizmjerno dalekoga središta kolineacije za T'' i T'. Povuku li se sjecištima bridova asimptotičke prizme i oskulacione ravnine paralele s određenim onim smjerom, dobit će se u probodištima ovih paralela sa suprotnim pobočkama prizme tri točke na traženim asimptotama. Ove će dakle asimptote biti određene dvokratnom primjenom ovoga postupka.

Prema tomu je dokazan ovaj poučak:

Kubična je hiperbola određena sa tri asimptotičke ravnine (koje čine prizmu), dalje sa dvije točke i njihovim pripadnim oskulacionim ravninama.[1]

Iz gore prikazanoga postupka razabira se određenje asimptotâ, a s njihovom se pomoću može odrediti svaka dalja točka krivulje. Zadanim će se naime dvjema oskulacionim točkama položiti makar kakova ravnina. Ona će sjeći tri asimptote u vrsima trokuta T', a težište ovoga trokuta bit će ujedno težište onoga trokuta, u kojem

[1] Iz ovoga se čl. 7. i iz čl. 8. razabira, da odredbeni elementi nijesu među sobom sasvim nezavisni.

Digitized by Google

izabrana ravnina siječe krivulju. Budući da su dva vrha ovoga trokuta poznata, moći će se odrediti treći njegov vrh, t. j. točka krivulje. Ova se konstrukcija ima držati analogijom za poznatu jednu konstrukciju točaka hiperbole 2. reda.

8. Daljina neke točke P na krivulji k_h^3 od asimptotičke ravnine

$$\gamma_s \ldots\ldots bx + ay = 0$$

bit će, ako se odmah uvrste parametričke koordinate točke P, ova:

$$d_\gamma = \frac{a\lambda^2}{(\lambda - b)\sqrt{F(b, a, 0)}}\,\omega,$$

gdje je, kako je poznato,

$$\omega = \begin{vmatrix} 1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & 1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & 1 \end{vmatrix},$$

ako su α, β, γ kutovi, što ih čine asimptote $(b_s c_s)$, $(a_s c_s)$ i $(a_s b_s)$. Veličina će $F(b, a, 0)$ izlaziti iz

$$F(x, y, z) = (x\sin\alpha - y\sin\beta\cos Z - z\sin\gamma\cos Y)^2 + (y\sin\beta\sin Z - z\sin\gamma\cos\alpha\sin Y)^2 + z^2\sin^2\alpha\sin^2\gamma\sin^2 Y,$$

gdje su Y i Z plošni kutovi, što ih čine ravnine koordinatâ na osima y i z.

Isto će se tako dobiti daljine točke P od druge dvije asimptotičke ravnine β_s i α_s:

$$d_\beta = \frac{ab^2c}{\lambda(\lambda - b)\sqrt{F(c, 0, -a)}}\,\omega,\quad d_\alpha = \frac{c(\lambda - b)^2}{\lambda\sqrt{F(0, c, b)}}\,\omega.$$

Ako se produkt triju korijena u nazivnicima ukratko označi sa k, bit će apsolutno uzeti produkt

$$d_\alpha . d_\beta . d_\gamma = \frac{\omega^3}{k} a^2b^2c^2 \ldots\ldots (3).$$

Kako je veličina $\frac{\omega^3}{k}$ nezavisna o parametru λ, dakle konstantna veličina, možemo reći:

Digitized by Google

Produkt (normalnih) udaljenosti makar koje točke na kubičnoj hiperboli od njezine tri asimptotičke ravnine, konstantna je veličina.

Za istostranu će kubičnu hiperbolu biti $\omega = 1$, dalje

$$F(b.\ a,\ 0) = b^2+a^2,\quad F(c,\ 0,\ -a) = c^2+a^2,\quad F(0,\ c,\ b) = c^2+b^2.$$

Ako sa a', b', c' označimo dijagonale za tri različne pobočke pravokutnoga paralelepipeda Π, bit će ovdje $k = a'b'c'$, dakle za istostranu hiperbolu onaj konstantni produkt:

$$d_\alpha . d_\beta . d_\gamma = \frac{a^2b^2c^2}{a'b'c'}.$$

9. Tangenta će krivulje imati, kako se može lako naći, jednadžbe:

$$\frac{x(\lambda-b)^2-a\lambda(\lambda-b)}{-ab} = y-\lambda = \frac{\lambda^2 z-bc\lambda}{-bc} = \mu.$$

Ova će tangenta sjeći asimptotičku ravninu γ_s u točki C_t. S pomoću

$$\mu = \frac{\lambda(b-\lambda)}{\lambda-2b}$$

naći će se za točku C_t ordinata

$$y_C = -\frac{b\lambda}{\lambda-2b}.$$

Isto će se tako naći ordinate za druge dvije sjecišne točke B_t i A_t one tangente s asimptotičkim ravninama β_s i α_s:

$$y_B = \frac{\lambda(2b-3\lambda)}{b-2\lambda} \quad \text{i} \quad y_A = \frac{2b\lambda}{\lambda+b}.$$

Diralište D tangente ima ordinatu $y = \lambda$. Točka će D već prema položaju tangente biti odijeljena ili od točke A_t, ili od B_t, ili od C_t ostalim dvjema točkama. Uzet ćemo za neku tangentu ovaj poredak: A_t, B_t, D, C_t, pa ćemo stvoriti omjere $\frac{A_tB_t}{B_tD}$, $\frac{A_tC_t}{DC_t}$.

Digitized by Google

Vrijednosti ovih omjera možemo naći s pomoću ordinatâ točaka A, B, C, D. Veličine dužinâ, koje se javljaju u onim omjerima, bit će ove:

$$y_A - y_B = \frac{3\lambda^2(\lambda-b)}{(\lambda+b)(b-2\lambda)}, \quad y_B - y = \frac{\lambda(b-\lambda)}{b-2\lambda},$$

$$y_A - y_C = \frac{3b\lambda(\lambda-b)}{(\lambda-2b)(\lambda+b)}, \quad y - y_C = \frac{\lambda(\lambda-b)}{\lambda-2b}.$$

Bit će dakle:

$$-\frac{A_tB_t}{B_tD} = -\frac{y_A - y_B}{y_B - y} = \frac{3\lambda}{\lambda+b}, \quad \frac{A_tC_t}{DC_t} = \frac{y_A - y_C}{y - y_C} = \frac{3b}{\lambda+b}.$$

Možemo dakle reći:

Tri točke A_t, B_t, C_t, u kojima neka tangenta krivulje k_h^3 siječe asimptotičke ravnine α_s, β_s, γ_s, određuju s diralištem D ove tangente grupu točaka, za koju vrijedi jednadžba:

$$\frac{B_tA_t}{B_tD} + \frac{C_tA_t}{C_tD} = 3.$$

U ovoj su jednadžbi A_t i D temeljne točke. Točka je B_t ona, koja dijeli A_t od D. Ovako uređena jednadžba vrijedi za makar koji poredak točaka A_t, B_t, C_t, D.

10. Točka D određuje sa svakim parom triju probodišta A_t, B_t, C_t po jedan jednostavni omjer. Ovakovi će omjeri biti:

$$\frac{DC_t}{DA_t}, \quad \frac{DC_t}{DB_t}, \quad \frac{DB_t}{DA_t}.$$

Budući da je $y_A - y = -\frac{\lambda(\lambda-b)}{\lambda+b}$, dobit će se s pomoću prije određenih razlika ove jednakosti:

$$\frac{DC_t}{DA_t} = \frac{\lambda+b}{\lambda-2b}, \quad \frac{DC_t}{DB_t} = \frac{b-2\lambda}{\lambda-2b}, \quad \frac{DB_t}{DA_t} = \frac{\lambda+b}{b-2\lambda}.$$

Digitized by Google

Iz prve i druge ove jednadžbe izlazi:

$$\frac{DC_t}{DA_t}+\frac{DC_t}{DB_t}=\frac{\lambda+b}{\lambda-2b}+\frac{b-2\lambda}{\lambda-2b}=-1,$$

iz druge će se i treće jednadžbe dobiti, da je

$$\frac{DB_t}{DC_t}+\frac{DB_t}{DA_t}=-1,$$

napokon izlazi iz prve i treće jednadžbe ova:

$$\frac{DA_t}{DC_t}+\frac{DA_t}{DB_t}=-1.$$

Ovdje treba spomenuti, da su i opet točke A_t i B_t na jednoj strani točke D, a točka C_t da je na drugoj strani. Razlike ordinatâ uzete su sve u istom smislu, kao u čl. 9. Ako spomenemo, da će na tangenti makar koje točke krivulje k_h^3 biti dva probodišta (A_t, B_t, C_t) na jednoj strani dirališta D, a treće na drugoj strani, imat ćemo ovaj općeni poučak:

Zbroje li se po dva od tri jednostavna omjera $\frac{DA_t}{DB_t}$, $\frac{DB_t}{DC_t}$, $\frac{DC_t}{DA_t}$ *tako, da u brojnicima svakoga para budu jednake dužine* (DA_t, DB_t *ili* DC_t), *pa se svaki omjer uzme s pripadnim predznakom, dobit će se za svaku tangentu krivulje* k_h^3 *konstantni zbroj, koji ima veličinu* -1.

Iz gornje tri jednadžbe, u kojima je na desnoj strani -1, možemo izvesti ove jednadžbe:

$$DA_t\ (DB_t+DC_t)=-DB_t\ .\ DC_t,$$
$$DB_t\ (DA_t+DC_t)=-DA_t\ .\ DC_t,$$
$$DC_t\ (DA_t+DB_t)=-DA_t\ .\ DB_t.$$

Budući da su ove jednadžbe izvedene s pomoću omjerâ, koji vrijede za dužine na tangenti i za projekcije tih dužinâ na osi y, vrijedit će ove jednadžbe svakako i za dužinë na tangenti, ako ih uzmemo s pripadnim predznacima, pa ako opet spomenemo, da

Digitized by Google

će dva probodišta A_t, B_t, C_t biti na istoj strani dirališta, a treće na protivnoj strani. Ako prvu gornju jednadžbu pomnožimo sa $\overline{DA}_t$, drugu sa $\overline{DB}_t$, a treću sa $\overline{DC}_t$, možemo izreći ovaj zakon:

Diralište makar koje tangente za krivulju k_h^3 određuje s probodištima ove tangente i asimptotičkih ravnina tri dužine $\overline{DA}_t$, $\overline{DB}_t$, $\overline{DC}_t$, za koje postoje jednakosti:

$$\overline{DA}_t^2(DB_t + DC_t) = \overline{DB}_t^2(DA_t + DC_t) = \overline{DC}_t^2(DA_t + DB_t).$$

11. Točkom P krivulje moći će se povući tri pravca, od kojih svaki siječe dvije asimptote. Pravac kroz P, koji siječe asimptote b_s i c_s, određuje na ovim asimptotama točke B_1^* i C_1^*. Isto će tako drugi pravac sjeći asimptote c_s i a_s u točkama C_2^* i A_2^*, a treći pravac daje na asimptotama a_s i b_s sjecišne točke A_3^* i B_3^*. S pomoću jednostavnoga računa dobivamo koordinate ovih točaka

$$B_1^*(a,\ \lambda-b,\ 0),\quad C_1^*\left(0,\ 0,\ \frac{c(b-\lambda)}{\lambda}\right);$$

$$C_2^*\left(0,\ 0,\ \frac{c(b+\lambda)}{\lambda}\right),\quad A_2^*\left(\frac{ab}{\lambda-b},\ b,\ c\right);$$

$$A_3^*\left(a\,\frac{2\lambda-b}{\lambda-b},\ b,\ c\right),\quad B_3^*(a,\ \lambda+b,\ 0).$$

Iz ovih se koordinata razbira ispravnost ovoga poučka:

Polože li se makar kojom točkom krivulje k_h^3 tri pravca, od kojih je svaki transversala dviju asimptota krivulje, dobit će se na dotičnim asimptotama dužine $A_3^*A_2^* = 2a$, $B_3^*B_1^* = 2b$, $C_2^*C_1^* = 2c$, (a, b, c znače dužine bridova paralelepipeda, što ga određuju asimptote).

Točka P krivulje bit će na transversali $B_3^*A_3^*$, dakle u ravnini $(B_3^*a_s)$. Isto će tako točka P biti na sastavnici $B_1^*C_1^*$, dakle u ravnini $(B_1^*c_s)$. Presječnica p_2 ovih ravnina bit će prema tomu jednostavna sekanta krivulje k_h^3. Budući da svaka od one dvije ravnine ide točkom (P) krivulje i jednom asimptotom, ne će ona moći sjeći krivulju u još kojoj točki. Jednadžbe pomenutih dviju ravnina bit će ove:

Digitized by Google

$$(B_3^* a_s) \equiv (y-b)c + \lambda(z-c) = 0,$$
$$(B_1^* c_s) \equiv (\lambda-b)x - ay = 0.$$

Prva će ravnina sjeći os z (asimptotu c_s) u točki $B_{3,c}^*$, za koju će biti

$$z_{(3)} = c + \frac{bc}{\lambda}.$$

Vidi se dakle, da je $B_{3,c}^* \equiv C_3^*$.

No kako je $\frac{bc}{\lambda}$ koordinata z točke P na krivulji, možemo bilježiti kraće

$$z_{(3)} = c + \zeta.$$

Druga će ravnina sjeći asimptotu a_s u točki $B_{1,a}^*$, za koju će biti

$$x_{(1)} = \frac{ab}{\lambda-b} = \frac{a\lambda}{\lambda-b} - a = \xi - a.$$

I opet je $B_{1,a}^* \equiv A_2^*$.

Iz koordinatâ y za točke B_3^* i B_1^* možemo lako zaključiti, da će za makar koju (pozitivnu ili negativnu) vrijednost parametra λ smjer prušca $\overline{B_3^* B_1^*}$ biti svagda smjer negativne osi y. Poradi toga će se moći svagda odrediti, kojom se krajnom točkom neke dužine $2b$ na osi y i asimptotom a_s ima položiti ravnina, koja će biti obilježena $(B_3^* a_s)$. Ako se za neku kubičnu hiperbolu jedna asimptota (c_s) uzme za os z, druga (b_s) u ravnini xOy paralelno s osju y, a treća (a_s) paralelno s osju x, tako da projekcija asimptote a_s na ravninu xOy siječe asimptotu b_s na pozitivnom dijelu njezinu, onda ćemo k_h^3 označiti: „orijentiranom krivuljom".

S pomoću resultatâ, koji su sadržani u ovom članku (11.), dolazimo do nove konstrukcije točaka za k_h^3, od koje su poznate sve tri asimptote, po ovom zakonu:

Ako se na asimptoti b_s orijentirane krivulje k_h^3 uzme makar gdje dužina $B_3^* B_1^* = 2b$, pa se polože ravnine $(B_3^* a_s)$ i $(B_1^* c_s)$,

Digitized by Google

dobit će se u presječnici ovih ravnina jednostavna sekanta p_2 krivulje. Točka P, u kojoj jednostavna ova sekanta siječe krivulju, dobit će se s pomoću jedne ili druge one ravnine. Prva ravnina $(B_3^* a_3)$ siječe asimptotu c_3 u točki, za koju je koordinata $z_{(3)} = c + \zeta$. Za točku će dakle P biti $\zeta = z_{(3)} - c$. S pomoću druge ravnine $(B_1^* c_3)$ dobiva se koordinata $\xi = x_{(1)} + a$ za točku P.

Posve će ista konstrukcija biti i s pomoću dužinâ $A_3^* A_2^* = 2a$ ili $C_2^* C_1^* = 2c$.

Budući da pravci $B_3^* A_3^*$ i $B_1^* C_1^*$ idu točkom P, dakle oba sijeku jednostavnu sekantu p_2 krivulje, moći će se za određenje točke P upotrijebiti ova (više geometrijska) konstrukcija:

Na asimptoti b_3 orijentirane krivulje k_h^3 uzet ćemo makar gdje dužinu 2b. Ravnina, položena krajnom točkom B_3^* ove dužine i asimptotom a_3, siječe asimptotu c_3 u točki C_2^*. Ravnina pak $(B_1^* c_3)$ siječe a_3 u točki A_2^*. Točka će P krivulje biti na pravcu $C_2^* A_2^*$. Ako se od C_2^* na osi z u smjeru negativne ove osi odmjeri dužina 2c, pa se krajnom točkom C_1^* i asimptotom b_3 položi ravnina, dobit će se u probodištu ove ravnine s pravcem $C_2^* A_2^*$ tražena točka P krivulje. Konstrukcija ostaje ista, ako se za početnu asimptotu uzme a_3 ili c_3.

12. Sedam točaka P, A_2^*, A_3^*, B_1^*, B_3^*, C_1^*, C_2^* određuje dva tetraedra, koji imadu jedan zajednički vrh (P), a tri su para bridova u istim pravcima. To su tetraedri $PA_2^* B_3^* C_1^*$ i $PA_3^* B_1^* C_2^*$. Obujmi $(P231)$ i $(P3'1'2')$ ovih tetraedara bit će, apsolutno uzeti:

$$\left.\begin{aligned}(P231) &= \frac{abc\omega}{3\lambda^2(\lambda-b)^2}\begin{vmatrix}\lambda^2 & 0 & 0\\ b^2 & \lambda-b & \lambda-2b\\ 0 & b-\lambda & \lambda\end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,abc.\omega\ \ldots\ldots\\ (P3'1'2') &= \frac{abc\omega}{3(\lambda-b)^2}\begin{vmatrix}0 & 2(\lambda-b)(b-\lambda) & 0\\ 1 & \lambda-b & 1\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix} = \frac{2}{3}\,abc.\omega\ \ldots\end{aligned}\right\} \quad (4).$$

Imademo dakle ovaj poučak:

Povuku li se makar kojom točkom P krivulje k_h^3 tri transversale, od kojih svaka siječe dvije asimptote, moći će se šest sjecišnih točaka na asimptotama kombinirati s točkom P u dva

Digitized by Google

tetraedra, za koje nije nijedan brid u kojoj asimptoti, a dužina nijednoga brida nije identična s dužinom koje transversale među asimptotama. Obujmi ovih tetraedara jednaki su. Svaki je $\frac{2}{3}$ *obujma onoga paralelepipeda, koji određuju asimptote.*

Odredit ćemo veličine dužinâ, koje određuje točka P sa šest sjecištâ na asimptotama, poznatim načinom, pa će biti, ako su opet α, β, γ kutovi, što ih čine asimptote $(b_s c_s)$, $(a_s c_s)$, $(a_s b_s)$:

$$\overline{PA}_2^{*2} = \frac{1}{\lambda^2}\Big\{[a^2\lambda^2 + \lambda^2(\lambda-b)^2 + c^2(\lambda-b)^2] - [2(\lambda-b)^2 c\,\lambda\cos\alpha] - \\ - [2(\lambda-b)ac\lambda\cos\beta] + [2(\lambda-b)a\lambda^2\cos\gamma]\Big\}.$$

Kratkoće radi možemo četiri veličine u uglastim zagradama označiti sa M, N, R, S, pa će izrazi za ostale dužine imati oblik:

$$\overline{PC}_2^{*2} = \frac{1}{(\lambda-b)^2}(M - N - R + S),$$

$$\overline{PB}_3^{*2} = \frac{b^2}{\lambda^2(\lambda-b)^2}(M - N + R - S),$$

$$\overline{PA}_3^{*2} = -\frac{1}{\lambda^2}(M - N + R - S),$$

$$\overline{PC}_1^{*2} = \frac{1}{(\lambda-b)^2}(M + N + R + S),$$

$$\overline{PB}_1^{*2} = \frac{b^2}{\lambda^2(\lambda-b)^2}(M + N + R + S).$$

Vidi se dakle, da će biti

$$\overline{PA}_2^{*}.\,\overline{PB}_3^{*}.\,\overline{PC}_1^{*} = \overline{PA}_3^{*}.\,\overline{PB}_1^{*}.\,\overline{PC}_2^{*},$$

zato vrijedi za općenu kubičnu hiperbolu ovaj poučak:

U oba će tetraedra (P231) i (P3'1'2') za makar koju točku P krivulje k_h^3 *biti jednaki produkti onih triju bridova, koji izlaze iz točke P.*

Ako je krivulja istostrana kubična hiperbola, reducirat će se izraz za prvu dužinu na

Digitized by Google

$$\overline{PA}_2^{*2} = \frac{1}{\lambda^2}\left[a^2\lambda^2 + \lambda^2(\lambda-b)^2 + c^2(\lambda-b)^2\right],$$

a izrazi će za ostale dužine biti ovi:

$$\overline{PC}_2^{*2} = \frac{1}{(\lambda-b)^2}M,\ \overline{PB}_3^{*2} = \frac{b^2}{\lambda^2(\lambda-b)^2}M, \ldots \overline{PB}_1^{*2} = \frac{b^2}{\lambda^2(\lambda-b)^2}M.$$

Za ovu će dakle hiperbolu biti:

$$\overline{PA}_2^{*} = \overline{PA}_3^{*},\ \overline{PC}_2^{*} = \overline{PC}_1^{*},\ \overline{PB}_3^{*} = \overline{PB}_1^{*}.$$

Ovo su dakle i opet analoge za poznate zakone kvadratične hiperbole.

13. U čl. 9. našli smo za neke omjere na tangenti ove vrijednosti:

$$\frac{B_t A_t}{B_t D} = \frac{3\lambda}{\lambda+b},\ \frac{A_t C_t}{D C_t} = \frac{3b}{\lambda+b}.$$

Šest dužina na transversalama kroz točku P krivulje među parovima asimptotâ daje tri omjera:

$$\frac{PA_2^*}{PC_2^*},\ \frac{PB_3^*}{PA_3^*},\ \frac{PC_1^*}{PB_1^*}.$$

Budući da je krivulja sastavljena od tri grane, koje su posve izvan asimptotičke prizme, i to tako, da je jedna potpuna grana u plošnom vanjskom kutu, što ga čine dvije asimptotičke ravnine, izlazi, da će jedan od ona tri omjera biti za dotičnu granu obilježen negativno, dok će oba ostala omjera biti pozitivna. Ovo se pravilo može učiniti općeno valjanim za sve tri grane krivulje, ako se na pr. srednjemu omjeru dade negativni predznak. S pomoću resultata u čl. 12. izlaze onda s obzirom na predznak jednakosti ovih omjera:

$$\frac{PA_2^*}{PC_2^*} = \frac{\lambda-b}{\lambda},\ \frac{PB_3^*}{PA_3^*} = -\frac{b}{\lambda-b},\ \frac{PC_1^*}{PB_1^*} = \frac{\lambda}{b}.$$

Tri grane naše krivulje izlaze za tri intervala parametra λ. Ako gornja tri omjera označimo ukratko sa I, II, III, imat ćemo ovaj

Digitized by Google

pregled za predznake ovih omjera s obzirom na točke 1., 2. i 3. grane krivulje:

	1.	2.	3.
	$+\lambda > b$	$+\lambda < b$	$\lambda < 0$
I	+	−	+
II	−	+	+
III	+	+	−

Vidi se dakle, da vrijednosti gornjih triju omjera vrijede za točku na makar kojoj grani krivulje. Tako će na prvoj grani biti omjer na transversali p_s negativan, jer su sjecišta A_s^* i B_s^* na raznim stranama točke P. Na drugoj će opet grani biti omjer I negativan i t. d.

Ako uzmemo u obzir vrijednosti dvaju omjera u početku ovoga čl., imat ćemo poradi zajedničke vrijednosti $-\frac{b}{\lambda}$ jednake dvoomjere:

$$\frac{PA_2^*}{PC_2^*} : \frac{PA_3^*}{PB_3^*} = \frac{A_t C_t}{DC_t} : \frac{A_t B_t}{B_t D}.$$

Za lijevi su dvoomjer uzete dužine između točke P i sjecištâ na transversalama, koje sijeku asimptote a_s, c_s i a_s, b_s. U desnom su pak dvoomjeru A_t i D temeljne točke. Ako opet na tangenti uzmemo D, C_t ili D, B_t kao temeljne točke, dobit ćemo druga dva dvoomjera, koji će biti jednaki dvoomjerima dužinâ na transversalama za asimptote: c_s, b_s i a_s, c_s ili b_s, c_s i b_s, a_s.

Ovi će parovi jednakih dvoomjera biti:

$$\frac{PC_1^*}{PB^*} : \frac{PC_2^*}{PA_2^*} = \frac{A_t C_t}{A_t D} : \frac{C_t B_t}{B_t D} = \frac{\lambda - b}{b},$$

$$\frac{PB_1^*}{PC^*} : \frac{PB_3^*}{PA_3^*} = \frac{B_t C_t}{C_t D} : \frac{A_t B_t}{A_t D} = -\frac{\lambda - b}{\lambda}.$$

Digitized by Google

Budući da je

$$\frac{PA_2^*}{PC_2^*} : \frac{PA_3^*}{PB_3^*} = -\frac{PB_1^*}{PC_1^*},$$

bit će

$$\frac{PB_1^*}{PC_1^*} = \frac{C_tA_t}{C_tD} : \frac{B_tA_t}{B_tD}.$$

Na isti će se način naći, da postoje jednakosti:

$$\frac{PA_3^*}{PB_3^*} = \frac{A_tC_t}{A_tD} : \frac{B_tC_t}{B_tD}$$

i

$$\frac{PA_2^*}{PC_3^*} = \frac{C_tB_t}{C_tD} : \frac{A_tB_t}{A_tD}.$$

Imademo dakle ovaj poučak:

Ako se uzme diralište D kao jedna, a makar koje od tri probodišta tangente u D s tri asimptotičke ravnine kao druga temeljna točka za dvostruki omjer točaka D, A_t, B_t, C_t, bit će vrijednost toga dvoomjera jednaka vrijednosti jednostavnoga omjera dužinâ, što ih određuje transversala kroz D među osobitim parom asimptotâ. Nijedna asimptota ovoga para nije u onoj asimptotičkoj ravnini, u kojoj je druga temeljna točka dvoomjera.

14. S pomoću triju omjera I, II, III možemo izvesti ove jednadžbe:

$$\frac{PC_2^*}{PA_2^*} + \frac{PB_3^*}{PA_3^*} = \frac{\lambda}{\lambda-b} - \frac{b}{\lambda-b} = +1,$$

$$\frac{PC_1^*}{PB_1^*} + \frac{PA_3^*}{PB_3^*} = \frac{\lambda}{b} - \frac{\lambda-b}{b} = +1,$$

$$\frac{PA_2^*}{PC_2^*} + \frac{PB_1^*}{PC_1^*} = \frac{\lambda-b}{\lambda} + \frac{b}{\lambda} = +1.$$

Imademo dakle ovaj poučak:

Zbroje li se omjeri dužinâ na transversalama, koje sijeku istu asimptotu, pa se za nazivnike omjerâ uzmu dužine, koje su

Digitized by Google

bliže asimptoti, a svaki se omjer označi pripadnim predznakom, dobit će se za makar koju točku krivulje pozitivna jedinica kao zbroj.

Ako posljednje tri jednadžbe zbrojimo, imat ćemo jednadžbu:

$$PA_2^* . PB_1^* . PC_1^* PC^* \left(\overline{PA_3^*}^2 + \overline{PB_3^*}^2\right) + PA_3^* . PB_1^* . PC_1^* . PB_3^* \left(\overline{PA_2^*}^2 + \overline{PC_2^*}^2\right) +$$

$$+ PA_2^* . PA_3^* . PC_2^* . PB_3^* \left(\overline{PB^*}^2 + \overline{PC_1^*}^2\right) = 3 . PA_2^* . PA_3^* . PB_1^* . PB_3^* . PC_1^* . PC_2^* .$$

S pomoću ove jednadžbe dobivamo poučak:

Među dužinama, što ih određuju asimptote na transversalama kroz makar koju točku krivulje, postoji relacija:

$$\frac{\overline{PB_1^*}^2 + \overline{PC_1^*}^2}{PB_1^* . PC_1^*} + \frac{\overline{PA_2^*}^2 + \overline{PC_2^*}^2}{PA_2^* . PC_2^*} + \frac{\overline{PA_3^*}^2 + \overline{PB_3^*}^2}{PA_3^* . PB_3^*} = 3.$$

Ove se dužine imadu uzeti s pripadnim relativnim predznacima. Vrijedno je opaziti, da su dužine, koje ulaze u isti razlomak gornje jednadžbe, dužine na istoj transversali.

Résumé.

Dans le mémoire précédent: „Sur l'hyperbole cubique" j'ai établi quelques théorèmes qui s'appliquent réellement à l'hyperbole cubique. Les trois asymptotes a_s, b_s, c_s de la courbe déterminent un parallélépipède $\Pi \equiv AEHGODFB$. Son arête c_s étant l'axe des z, le plan des coordonnées xOy sera la face du parallélépipède, passant par b_s parallèlement à a_s. Les deux autres plans xOz et yOz sont parallèles à a_s et b_s respectivement. Les longueurs des arêtes sur a_s, b_s, c_s soient a, b, c. Les resultats des recherches sont les suivants:

1° Par un point quelconque P de la courbe étant menés trois plans, dont chacun est parallèle à deux des asymptotes, on obtiendra chaque fois sur la troisième asymptote un point d'intersection. Les trois points obtenus déterminent un plan $V = 0$ (éq. 1 du mémoire) qui passe par le point choisi P. Deux plans $V = 0$,

Digitized by Google

construits pour deux points P de la courbe, ont une droite commune, étant parallèle aux arêtes du prisme asymptotique.

2° Les six distances (normales) d'un point quelconque P de la courbe aux six faces du parallélépipède, déterminé par les trois asymptotes, forment deux groupes, dont chacun contient trois distances. Le produit des distances d'un même groupe est égal au produit des trois distances de l'autre (éq. 1*).

La droite menée par un point quelconque P de la courbe parallèlement à l'asymptote a_s coupera deux faces du parallélépipède Π en D_1 et D_2 (D_1 est sur yOz). La parallèle à l'asymptote b_s coupe deux faces du Π en D_3 et D_4 (D_4 est sur xOz); la parallèle à c_s enfin coupe deux faces du Π en D_5 et D_6 (D_5 est sur xOy). On aura l'égalité $\overline{PD_1} \cdot \overline{PD_3} \cdot \overline{PD_5} = \overline{PD_2} \cdot \overline{PD_4} \cdot \overline{PD_6}$. Les volumes des deux tétraèdres $PD_1D_3D_5$ et $PD_2D_4D_6$ sont égaux; chacun sera $\frac{1}{6}$ du volume du parallélépipède Π.

3° Les coordonnées d'un point P de la courbe soient ξ, η, ζ. Si l'on porte les longueurs $3\xi - a$, $3\eta - b$, $3\zeta - c$ sur les asymptotes a_s, b_s, c_s en partant des points A, B, O, les trois autres points extrêmes déterminent le plan osculateur du point P (éq. ρ).

4° Soit T' un triangle, déterminé par les intersections d'un plan osculateur quelconque avec les trois asymptotes. Les aires des trois projections (obliques) d'un tel triangle sur les trois plans des coordonnées donnent un produit constant $27\, a^2b^2c^2 \sin\alpha \sin\beta \sin\gamma$ (éq. 2).

5° Par un point quelconque P de la courbe étant menés trois plans, dont chacun est parallèle à deux des asymptotes, chacun de ces plans coupera l'arête du prisme asymptotique qui est l'intersection des deux plans asymptotiques passant par les deux asimptotes respectives, en un point, et les trois points ainsi obtenus déterminent le plan osculateur en P.

6° Soit T' un triangle déterminé par les intersections d'un plan osculateur quelconque avec les trois asymptotes. L'aire d'un tel triangle T' est le double de l'aire du triangle T'', déterminé par les intersections de ce même plan osculateur avec les trois plans asymptotiques.

7° Les deux triangles T' et T'' dans un même plan osculateur sont perspectifs par rapport à un centre à l'infini.

Digitized by Google

8° L'hyperbole cubique est déterminée par les trois plans asymptotiques et par deux points quelconques avec leurs plans osculateurs.

9° Le produit des distances (normales) d'un point quelconque de la courbe aux trois plans asymptotiques est une grandeur constante (éq. 3).

10° Soient A_t, B_t, C_t les points d'intersection d'une tangente quelconque de la courbe avec les trois plans asymptotiques $\alpha_s, \beta_s, \gamma_s$, et soit D son point de contact. Si D et A_t sont séparés par l'un des deux autres points B_t ou C_t, on aura l'équation

$$\frac{B_t A_t}{B_t D} + \frac{C_t A_t}{C_t D} = 3.$$

On peut établir des équations analogues pour d'autres ordres des quatre points.

11° Des trois longueurs, déterminées par le point D et les trois points A_t, B_t, C_t, on formera les sommes égales:

$$\frac{DC_t}{DA_t} + \frac{DC_t}{DB_t} = \frac{DB_t}{DC_t} + \frac{DB_t}{DA_t} = \frac{DA_t}{DC_t} + \frac{DA_t}{DB_t} = -1.$$

12° Pour les mêmes trois longueurs (prises avec des signes respectifs), on aura les égalités:

$$\overline{DA_t^2}(DB_t + DC_t) = \overline{DB_t^2}(DA_t + DC_t) = \overline{DC_t^2}(DA_t + DB_t).$$

13° Si l'on mène par un point quelconque P de la courbe trois transversales, dont chacune coupe deux des asymptotes, on obtiendra les six points d'intersections A_2^*, A_3^*, B_1^*, B_3^*, C_1^*, C_2^*. (La transversale qui coupe a_s et b_s donne les points d'intersections respectifs A_s^* et B_s^*, etc.). On aura les égalités:

$$\overline{A_3^* A_2^*} = 2a, \quad \overline{B_3^* B_1^*} = 2b, \quad \overline{C_2^* C_1^*} = 2c.$$

14° Si l'on prend quelque part sur b_s la longueur $2b = \overline{B_3^* B_1^*}$ (la longueur $+\overline{B_s^* B_1^*}$ a toujours le sens de l'axe des coordonnées y negatif) et si l'on mène les plans $(B_3^* a_s)$, $(B_1^* c_s)$, la droite d'intersection sera une sécante simple de la courbe. Le plan $(B_3^* a_s)$

Digitized by Google

coupe l'asymptote c_s en un point, dont la coordonnée $z_{(3)}$ sera égale à $c+\zeta$. Le point P (ξ, η, ζ) commun à la sécante et à la courbe aura donc la coordonnée $\zeta = z_{(3)} - c$. L'autre plan $(B_1^* c_s)$ donne la coordonnée $\xi = x_{(1)} + a$ de ce point P.

15° Les six points A_2^*, A_3^*, B_1^*, B_3^*, C_1^*, C_2^* déterminent avec le point P deux tétraèdres $PA_2^*B_3^*C_1^*$ et $PA_3^*B_1^*C_2^*$. Le volume de chacun de ces deux tétraèdres est égal à $\frac{2}{3}$ du volume du parallélépipède Π.

16° Les produits des longueurs des trois arêtes des ces deux tétraèdres qui passent par le point commun P, sont égaux (éq. 4).

17° On aura pour l'hyperbole cubique équilatère les égalités:

$$\overline{PA_2^*} = \overline{PA_3^*}, \quad \overline{PC_2^*} = \overline{PC_1^*}, \quad \overline{PB_1^*} = \overline{PB_3^*}.$$

18° D'après les significations indiquées on aura les équations:

$$\frac{PB_1^*}{PC_1^*} = \frac{C_t A_t}{C_t D} : \frac{B_t A_t}{B_t D},$$

$$\frac{PA_3^*}{PB_3^*} = \frac{A_t C_t}{A_t D} : \frac{B_t C_t}{B_t D},$$

$$\frac{PA_2^*}{PC_2^*} = \frac{C_t B_t}{C_t D} : \frac{A_t B_t}{A_t D}.$$

19° Les six longueurs sur les trois transversales par un point de la courbe donnent les sommes égales:

$$\frac{PC_2^*}{PA_2^*} + \frac{PB_3^*}{PA_3^*} = \frac{PC_1^*}{PB_1^*} + \frac{PA_3^*}{PB_3^*} = \frac{PA_2^*}{PC_2^*} + \frac{PB_1^*}{PC_1^*} = +1.$$

20° Les mêmes six longueurs donnent donc la relation:

$$\frac{\overline{PB_1^*}^2 + \overline{PC_1^*}^2}{PB_1^* \cdot PC_1^*} + \frac{\overline{PA_2^*}^2 + \overline{PC_2^*}^2}{PA_2^* \cdot PC_2^*} + \frac{\overline{PA_3^*}^2 + \overline{PB_3^*}^2}{PA_3^* \cdot PB_3^*} = 3.$$

Les longueurs de la même fraction sont sur la même transversale. Toutes ces longueurs sont affectées du signe respectif.

Digitized by Google

O translaciji po paralelama s osju X.

Predano u sjednici matematičko-prirodoslovnoga razreda Jugoslavenske akademije znanosti i umjetnosti dne 20. listopada 1906.

Napisao pravi član dr. Vladimir Varičak.

Ta je translacija određena infinitezimalnom transformacijom

$$Uf \equiv (1 - e^{-2x} \operatorname{th}^2 b) \frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{th} y \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad (1)$$

koja vrijedi samo u području ograničenom sa četiri zajedničke paralele koordinatnih osi. U ovom izrazu parametar je b, a to je odrezak, što ga paralela sa $+X$ odsijeca na osi Y. Izvan spomenutoga područja leže one paralele sa $+X$, koje ne presijecaju os Y.[1] Da nađemo izraz za translaciju po ovim izvanjim paralelama, valja nam potražiti jednadžbu tih paralela.

1. Jednadžba paralele sa $+X$, koja ne siječe Y. Engel je u svojim bilješkama k radnjama Lobačevskoga[2] postavio jednadžbu pravca, u kojoj dolaze dva parametra i kojom se može predočiti svaki pravac, bez obzira na njegov položaj prema koordinatnim osima. Parametri su dužina p normale spuštene iz početka koordinatnoga sistema na taj pravac i kut ω, što ga ta normala zatvora s osju X. Ta normalna jednadžba pravca, od koje ćemo u ovom izvođenju poći, glasi

$$\cos\omega \operatorname{sh} x + \sin\omega \operatorname{th} y = \operatorname{th} p \operatorname{ch} x. \qquad (2)$$

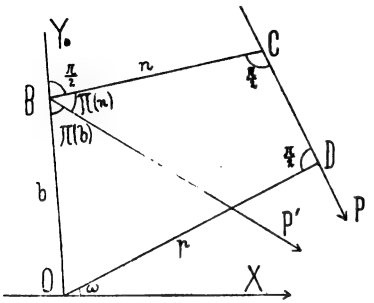
Na paralelu P sa $+X$ spustimo iz O normalu p i odredimo još normalu BC, koja je zajednička osi Y i paraleli P. Ova nor-

[1] Vidi moju radnju: O transformacijama u ravnini Lobačevskoga. Rad 165, str. 50–80.

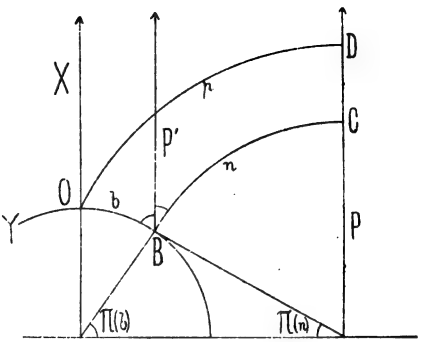
[2] Engel-Lobatschefskij, str. 258.

Digitized by Google

mala odsijeca na Y dužinu b. U četverokutu $OBCD$ imamo tri prava kuta[3], pa je u njemu



Sl. 1.



Sl. 1.bis

$$\sin\omega = \operatorname{th} b \operatorname{th} p, \quad \cos\omega = \frac{\operatorname{ch} n}{\operatorname{ch} p}. \tag{3}$$

Kad to uvrstimo u prethodnu jednadžbu, biva

$$\operatorname{ch} n \operatorname{sh} x + \operatorname{sh} p \,(\operatorname{th} b \operatorname{th} y - \operatorname{ch} x) = 0, \tag{4}$$

a kako je

$$\operatorname{sh} p = \operatorname{sh} n \operatorname{ch} b, \tag{5}$$

izlazi

$$\operatorname{sh} x + \operatorname{th} n \operatorname{ch} b \,(\operatorname{th} b \operatorname{th} y - \operatorname{ch} x) = 0. \tag{6}$$

Iz ove ćemo jednadžbe još eliminirati parametar n. Povučemo li tačkom B paralelu P' sa $+X$, javit će se kod B kutovi $\Pi(b)$ i $\Pi(n) = \frac{\pi}{2} - \Pi(b)$. Dakle je

$$\cos\Pi(n) = \sin\Pi(b)$$

ili

$$\operatorname{th} n \operatorname{ch} b = 1, \tag{7}$$

pak radi toga možemo jednadžbu (6) pisati

[3] Slika 1bis predočuje isto, što i sl. 1., samo na osnovi poznate realne interpretacije hiperbolne geometrije.

Digitized by Google

$$\operatorname{sh} x - \operatorname{ch} x + \operatorname{th} b \operatorname{th} y = 0$$

ili

$$\operatorname{th} b \operatorname{th} y - e^{-x} = 0. \tag{8}$$

Ovo je napokon jednadžba paralele P, koju trebamo. Paralela je određena, kad znademo udaljenost b od početka koordinatnoga sistema normale, zajedničke paraleli i osi Y. Treba samo u tački B uzdići normalu na Y i na njoj odmjeriti dužinu BC, koja pripada komplementu kuta paralelnosti $\Pi(b)$, i onda tačkom C povući paralelu sa $+X$.

2. **Infinitezimalna transiacija.** Na osnovi jednadžbe (8) nalazimo za element luka ove paralele

$$ds = \frac{dx\, e^{2x}\operatorname{th}^2 b}{e^{2x}\operatorname{th}^2 b - 1} = dx \operatorname{ch}^2 y = - dy \operatorname{coth} y, \tag{9}$$

dakle

$$s = \frac{1}{2} \log \frac{e^{2x_1}\operatorname{th}^2 b - 1}{e^{2x}\operatorname{th}^2 b - 1} = \log \frac{\operatorname{sh} y}{\operatorname{sh} y_1}.$$

Infinitezimalna je translacija

$$Uf \equiv \frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} \frac{\partial f}{\partial x} - \operatorname{th} y \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{10}$$

Granični krugovi

$$\omega(x, y) \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} = e^b$$

invarijante su druge vrste, jer je

$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch}^3 y}(1 + \operatorname{sh}^2 y)$$

t. j.

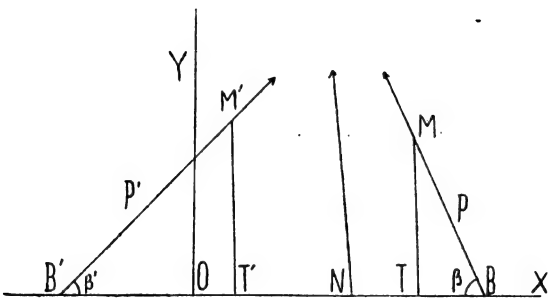
$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} = \omega.$$

Sada ću izvesti općenitije izraze, koji vrijede neograničeno u cijeloj ravnini. A zato nam valja postaviti takvu jednadžbu para-

Digitized by Google

lele sa $+X$, gdje ne treba gledati, da li ta paralela siječe ordinatnu os ili je ne siječe.

3. Osobita jednadžba pravca. Uzmimo pravac P, koji os X zgađa pod kutom β i na njoj odsijeca dužinu $OB = b$, dok os Y



Sl. 2.

može sjeći ili ne sjeći. Odredimo onda na osi X tačku N, tako da BN bude dužina, koja odgovara kutu paralelnosti β. Označimo li ON sa n, imamo dakle $\beta = \Pi(b-n)$. Normala uzdignuta u tački N na os X paralelna je s pravcem P. Uzmemo li na tom pravcu tačku M, onda je $OT = x$, $MT = y$. Tako dobivamo pravokutni trokut BMT, komu su katete y i $b-x$. U njemu je

$$\operatorname{tg}\Pi(b-n) = \cos\Pi(y)\operatorname{tg}\Pi(b-x). \qquad (11)$$

A kako je

$$\operatorname{tg}\Pi(b-n) = \frac{\sin\Pi(b)\sin\Pi(n)}{\cos\Pi(b)-\cos\Pi(n)},$$

a tako i $\operatorname{tg}\Pi(b-x)$, možemo (1) pisati

$$\frac{\sin\Pi(n)}{\cos\Pi(b)-\cos\Pi(n)} = \cos\Pi(y)\cdot\frac{\sin\Pi(x)}{\cos\Pi(b)-\cos\Pi(x)}. \qquad (12)$$

Ovo je jednadžba pravca P. Pravac je tu određen odreskom b na osi X i odreskom n, što ga čini normala na os X, koja je paralelna s tim pravcem P. S ova dva parametra b i n pravac je potpuno određen. Kad su dani ovi parametri, određene su tačke B i N, pa možemo pravac ovako konstruirati. U tački

Digitized by Google

N uzdignimo normalu na os X i onda tačkom B povucimo paralelu s tom normalom.[4] Ta je paralela pravac P.

4. Općena jednadžba paralele sa $+X$. Da dobijemo paralelu s osju $+X$, moramo pustiti da bude

$$\lim b = \infty ,$$

a onda je

$$\lim \cos \Pi (b) = 1 ,$$

pak će ostati

$$\frac{\sin \Pi (n)}{1 - \cos \Pi (n)} = \cos \Pi (y) \, . \, \frac{\sin \Pi (x)}{1 - \cos \Pi (x)} ,$$

t. j.

$$\operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Pi (n) = \cos \Pi (y) \operatorname{cotg} \frac{1}{2} \Pi (x)$$

ili

$$e^n = e^x \cos \Pi (y). \qquad (13)$$

Ovu općenu jednadžbu paralele sa $+X$ pisat ćemo napokon u obliku

$$e^{x-n} - \coth y = 0. \qquad (14)$$

Paralela sa $+X$ određena je parametrom n posve, te je možemo konstruirati ovako. U tački N uzdignimo normalu na os X i raspolovimo pravi kut među tom normalom i apscisnom osi. Odredimo onda dužinu a, koja odgovara kutu od 45° kao kutu paralelnosti,[5] te je prenesimo na onu raspolovnicu počevši od tačke N. Neka je $NS = a$; onda još valja tačkom S povući paralelu s onom normalom ili pak s osju $+X$.

U ovom je specijalnom slučaju dužina NS Schweikartova konstanta. Za paralele sa $+X$, koje sijeku Y, negativan je n.

---

[4] Za konstrukciju paralele prema zadanome pravcu vidi: Engel-Lobatschefskij, str. 256.

[5] Konstrukciju dužine, koja odgovara izvjesnome kutu paralelnosti, vidi: Engel-Lobatschefskij, str. 242.

Digitized by Google

5. Jednadžba paralele sa $-X$. Neka pravac P' (sl. 2.) na negativnoj strani osi X odsijeca dužinu $OB' = b'$, a paralelan neka je s onom istom normalom na os X u tački N. Iz pravokutnoga trokuta $B'T'M'$, komu su katete y i $b' + x$, a kut $\beta' = \Pi(b' + n)$, izlazi kao jednadžba pravca P'

$$\operatorname{tg}\Pi(b' + n) = \cos\Pi(y) \,.\, \operatorname{tg}\Pi(b' + x)$$

ili

$$\frac{\sin\Pi(n)}{\cos\Pi(b') + \cos\Pi(n)} = \cos\Pi(y) \,.\, \frac{\sin\Pi(x)}{\cos\Pi(b') + \cos\Pi(x)}. \qquad (15)$$

Uz $\lim b' = \infty$, dakle $\Pi(b') = 0$, prelazi to u

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(n) = \cos\Pi(y) \,.\, \operatorname{tg}\frac{1}{2}\Pi(x)$$

ili

$$e^{n-x} - \coth y = 0. \qquad (16)$$

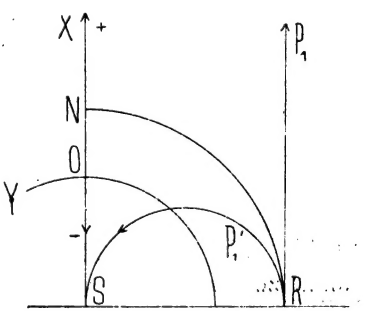
Dosada smo radili direktno, bez pomoći poznate realne interpretacije hiperbolne geometrije. U njoj je (sl. 3.) paralela sa $+X$ predočena pravcem P_1, a paralela sa $-X$ polukrugom P'_1. Normala na os X jest NR. Sad znamo, da je

$$SN = e^{ON} = e^n.$$

Zato je u običnim pravokutnim koordinatama jednadžba pravca P_1

$$x = e^n, \qquad (17)$$

a polukruga P_1'



Sl. 3.

$$x^2 + y^2 - e^n x = 0. \qquad (18)$$

Ove se pak jednadžbe s pomoću formulâ, kojima se iz obične ravnine prelazi na hiperbolnu, transformiraju u (15) i (16). Još vidimo, da se (16) iz (15) dobiva refleksijom na normali NR.

Digitized by Google

6. Infinitezimalna translacija. Iz jednadžbe (4) izlazi

$$\frac{dy}{dx} = -\, e^{x-n}\, \mathrm{sh}^2 y\,, \tag{19}$$

pa tako za element luka dobivamo

$$ds = dx\, \mathrm{sh}\, y\, \sqrt{\coth^2 y + e^{2(x-n)}\, \mathrm{sh}^2 y}\,,$$

a to se s pomoću (14) pretvara u

$$ds = e^{x-n}\, \mathrm{sh}\, y\, \mathrm{ch}\, y\, dx. \tag{20}$$

Iz (14) je

$$\mathrm{sh}\, y = \frac{1}{\sqrt{e^{2(x-n)} - 1}}\,, \quad \mathrm{ch}\, y = \frac{e^{x-n}}{\sqrt{e^{2(x-n)} - 1}}\,,$$

pa je stoga također

$$ds = \frac{e^{2(x-n)}\, dx}{e^{2(x-n)} - 1}\,, \tag{21}$$

dakle

$$e^{2s} = \frac{e^{2(x_1-n)} - 1}{e^{2(x-n)} - 1}\,. \tag{22}$$

Jednadžbe (19) i (20) daju još[6]

$$ds = -\coth y\, dy\,, \tag{23}$$

otkle za s dobivamo isti izraz kao na str. 56. u Radu 165.

Infinitezimalnu translaciju po paralelama sa $+X$ možemo pisati

$$Uf \equiv \left(1 - e^{2(x-n)}\right)\frac{\partial f}{\partial x} - \mathrm{th}\, y\, \frac{\partial f}{\partial y}\,. \tag{24}$$

Ovaj izraz vrijedi u cijeloj ravnini. Da granični krugovi

[6] U Radu 165., na str. 56. u 7. retku odozdo treba na desnoj strani jednadžbe dodati još dy.

Digitized by Google

$$\omega(x, y) \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y} = e^b \qquad (25)$$

ostaju kod ovih translacija na drugi način invarijantni, uvjeravamo se lako, jer se

$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y}\ (1 - e^{-2(x-n)} + \operatorname{th}^2 y)$$

poradi (4) reducira na

$$U\omega \equiv \frac{e^x}{\operatorname{ch} y},$$

t. j. $U\omega \equiv \omega$. Primijetit ću još da koordinate u i v navedene u Radu 165. na str. 67. samo onda određuju realnu tačku[7], ako je $\Pi(u) + \Pi(v) > \frac{\pi}{2}$.

Inhaltsangabe.

Wird die Parallele zur x-Axe durch den Abschnitt auf der y-Axe bestimmt, wie es bei Lobatschefskij geschieht, so gilt die Formel (1) für die Translation längs dieser Parallele nur in dem durch gemeinsame Parallelen der Koordinatenaxen begrenzten Gebiete. Für die Translation im äusseren Gebiete gilt die analoge Formel (10). Eine die y-Axe nicht schneidende Parallele zur positiven x-Axe kann man auf folgende Art bestimmen. Aus dem Koordinatenanfangspunkte fälle man das Lot p auf die Parallele P (Fig. 1.) und konstruiere das der y-Axe und der Parallele P gemeinsame Lot n. Aus dem Vierecke $OBCD$ mit drei rechten Winkeln folgen (3) und (5) und so erhält man aus der Engel'schen Gleichung (2) der Geraden P die Gleichung (6). Zieht man durch B die Parallele zur positiven x-Axe, so hat man gleich die Relation (7) und die Formel (6) wird in die Gleichung (8) der äusseren Parallele transformiert. Die Parallele P wird hier durch die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkte jenes gemeinsamen Lotes bestimmt.

[7] Isporedi В. Каганъ, Очеркъ геометрической системы Лобачевскаго. Одесса 1900., str. 114.

Digitized by Google

Um aber einen allgemeineren Ausdruck zu bekommen, der in der ganzen Ebene gültig wäre, kann man folgendermassen vorgehen. Die Gerade P (Fig. 2.) schneide unter dem Winkel β die x-Axe im Punkte B. Das dem Parallelwinkel β entsprechende Lot sei BN. Die im Punkte B errichtete Normale wird parallel zur Geraden P. Fällt man von irgendeinem Punkte M der Geraden P das Lot MT auf die x-Axe, so folgt aus dem rechtwinkeligen Dreiecke BMT die Formel (11) und nach einer einfachen Transformation (12) als die Gleichung der durch die Parameter b und n bestimmten Geraden P. Wird b unendlich gross, so übergeht die Gerade P in die Parallele P_1 zur positiven x-Axe. Aus der vorhergehenden Formel ergibt sich (14) als die Gleichung der betreffenden Parallele. Die bestimmende Grösse der Parallele P_1 ist die Entfernung vom Koordinatenanfangspunkte jener Normale zur x-Axe, die mit P_1 parallel ist. Die Formel (14) stellt die allgemein gültige infinitesimale Translation längs der Parallele zur positiven x-Axe.

Digitized by Google